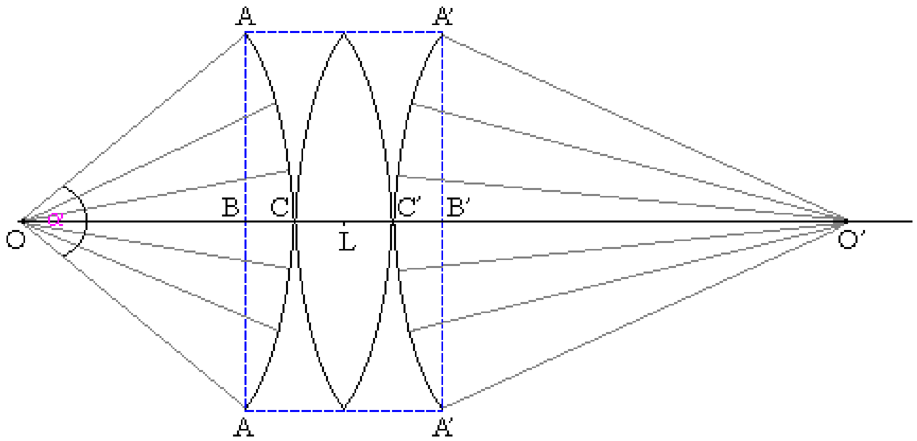
## Ćwiczenie 42

# WYZNACZANIE OGNISKOWEJ SOCZEWKI CIENKIEJ

### Wprowadzenie teoretyczne.

Soczewka jest obiektem fizycznym wykonanym z materiału przezroczystego o zadanym kształcie i symetrii obrotowej. Interesować się będziemy soczewkami ograniczonymi powierzchniami sferycznymi (lub powierzchnią sferyczną i płaską), takimi, że maksymalna odległość między nimi jest dużo mniejsza niż promień krzywizny tych powierzchni. Wiązka promieni równoległych, przyosiowych, po przejściu przez soczewkę skupia się w odległości *f* od niej. Odległość ta zwana jest ogniskową , a punkt skupienia ogniskiem. Źródło punktowe umieszczone w ognisku daje po przejściu przez soczewkę wiązkę równoległą.

Rozważmy wiązkę światła wybiegającą z punktu O leżącego na głównej osi optycznej. Czoło fali rozbieżnej w pewnym momencie dociera do soczewki. Oznaczamy je przez *AA*.




Rys.1

Jeżeli materiał soczewki ma większy współczynnik załamania niż otoczenie, wówczas czoło fali zostanie najbardziej opóźnione przy przejściu przez najgrubszą część soczewki. Po drugiej stronie czoło fali formuje się w postaci sfery wklęsłej *A'A'* i fala zbiega się w punkcie O'. Zakładamy, że soczewka jest bardzo cienka i promienie biegną przyosiowo, tak że nie następuje deformacja czoła fali w materiale soczewki (brak aberracji sferycznej). Drogę *L* wewnątrz soczewki oraz drogę *AA*' światło przebiega w takim samym czasie, zatem

$$AA' = nL, \qquad (1)$$

oraz

$$AA' = BC + L + B'C', \qquad (2)$$

gdzie: $BC$ i $B'C'$ - są strzałkami powierzchni falowych tuż przy powierzchniach ograniczających soczewkę.

Z zależności geometrycznych łatwo zauważyć, że

$$BC = R - \sqrt{R^2 - \frac{k_1^{\,2}}{4}} = R - R\cos\frac{\alpha}{2} = R\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right),$$

ponieważ
$$\frac{k_1}{2} = R\sin\frac{\alpha}{2} \ ,$$

gdzie: $R$ - jest promieniem krzywizny powierzchni falowej fali padającej na soczewkę,

$k_1$ - długością cięciwy wyznaczonej przez ramiona kąta $\alpha$.

Ostatecznie
$$BC = 2R\sin^2\frac{\alpha}{4} \ . \qquad (3)$$

Dla promieni przyosiowych kąt $\alpha$ jest mały i sinus kąta możemy zastąpić jego miarą łukową

$$\alpha = \frac{k}{R} \ ,$$

gdzie: $k$ - jest długością łuku $AA$,

a
$$\frac{\alpha}{4} = \frac{k}{4R} \qquad \text{i} \qquad \sin\frac{\alpha}{4} \approx \frac{\alpha}{4} \ ,$$

oraz
$$\sin^2\frac{\alpha}{4} \approx \frac{k^2}{16R^2} \ . \qquad (4)$$

Zatem wyrażenie (3) po uwzględnieniu zależności (4) da się zapisać jako

$$BC \approx \frac{k^2}{8R} \ ,$$

podobnie
$$B'C' \approx \frac{k^2}{8R'} \ .$$

Teraz wzór (2) przyjmie postać

$$AA' = \frac{k^2}{8R} + L + \frac{k^2}{8R'} \quad . \qquad (5)$$

Ponieważ droga optyczna *nL* jest stała dla danej soczewki, zatem na mocy równania (1) również *AA'* = const.

Dla różnych wielkości $R_1$, $R_1'$, $R_2$, $R_2'$ dla tej samej soczewki otrzymamy zależność

$$\frac{k^2}{8R_1} + L + \frac{k^2}{8R_1'} = \frac{k^2}{8R_2} + L + \frac{k^2}{8R_2'} = nL \quad , \qquad (5a)$$

stąd łatwo zauważyć, że

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'} \quad .$$

Jeżeli $R_2 \to \infty$, to $R_2' \to f$ ,

zatem
$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} = \frac{1}{f} \quad , \qquad (6)$$

lub prościej, gdy $R_1 = x$ - odległość przedmiotu od soczewki, a $R_1' = y$ - odległość obrazu od soczewki

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f} \quad . \qquad (7)$$

Ostatni związek znany jest jako wzór soczewkowy dla soczewek cienkich. Po przekształceniach wzoru (3) otrzymamy odpowiednio:

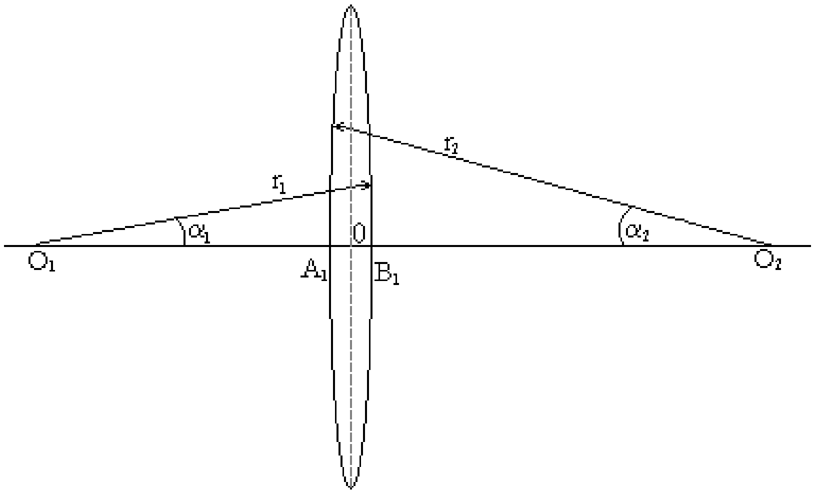
$$x = \frac{yf}{y - f} \quad , \qquad (8)$$

$$y = \frac{xf}{x - f} \quad , \qquad (9)$$

$$f = \frac{xy}{x + y} \quad . \qquad (10)$$

Dla soczewek rozpraszających ogniskową $f$ bierzemy ze znakiem minus. Odległości obrazu urojonego od soczewki odpowiada ujemna wartość $y$.

Wyznaczamy grubość soczewki $L$ w podobny sposób jak określiliśmy wielkość strzałek powierzchni falowych.




Rys. 2

Z rys. 2 widać, że $L = A_1O + OB_1$ , przy czym $A_1O = 2r_2 \sin^2 \frac{\alpha_1}{4}$ , (jako strzałka powierzchni soczewki)

a $$OB_1 = 2r_1 \sin^2 \frac{\alpha_1}{4} ,$$

gdzie: $r_1$ i $r_2$ - promienie krzywizn powierzchni soczewki.

Ponieważ (patrz wzór 4)

$$\sin^2 \frac{\alpha_1}{4} \approx \frac{k^2}{16r_1^2} \qquad \text{a} \qquad \sin^2 \frac{\alpha_2}{4} \approx \frac{k'^2}{16r_2^2} ,$$

to

$$L = \frac{k^2}{8r_1} + \frac{k'^2}{8r_2} \quad . \qquad (11)$$

Z równania (5a) i zależności (11) otrzymujemy

$$\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) ,$$

a z (6)

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right) . \qquad (12)$$

Powiększenie liniowe $p=\frac{H}{h}$ , (gdzie $H$ - jest wysokością obrazu, a $h$ - jest wysokością przedmiotu), lub

$$p=\left|\frac{y}{x}\right|=\left|\frac{f}{x-f}\right| . \qquad (13)$$

Z (7) dostajemy

$$x+y=\frac{x\cdot y}{f} ,$$

a uwzględniając (9)

$$x+y=\frac{x^2}{x-f} .$$

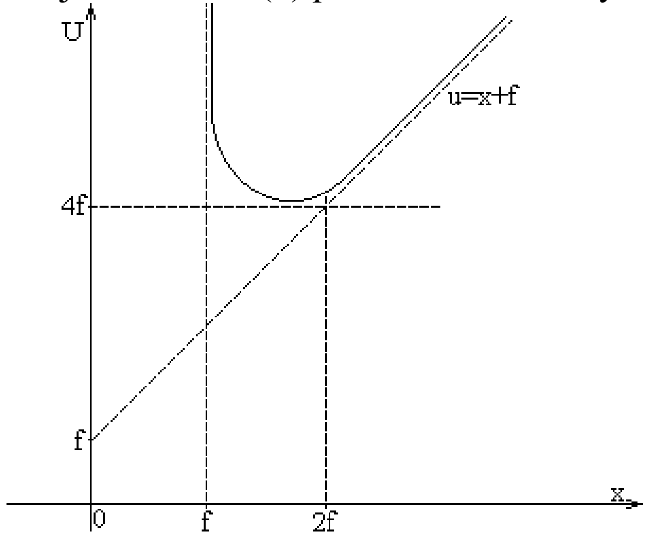
Wprowadzimy oznaczenia $u=x+y$ , wówczas

$$u=\frac{x^2}{x-f} \qquad (14)$$

Jest to równanie hiperboli o asymptotach

$x=f$ oraz $u=x+f$ .

Wykres krzywej danej równaniem (4) przedstawiono na rysunku 3.




Rys. 3

Krzywa posiada minimum w punkcie, w którym

$$\frac{du}{dx_{(1)}} = 0 \quad \text{czyli} \quad \frac{du}{dx_{(1)}} = \frac{2x_1(x_1 - f) - x_1^2}{(x_1 - f)^2} = 0 ,$$

ale $$2x_1(x_1 - f) - x_1^2 = 0 ,$$

stąd $$x_1 = 2f \quad \text{i} \quad u_1 = 4f .$$

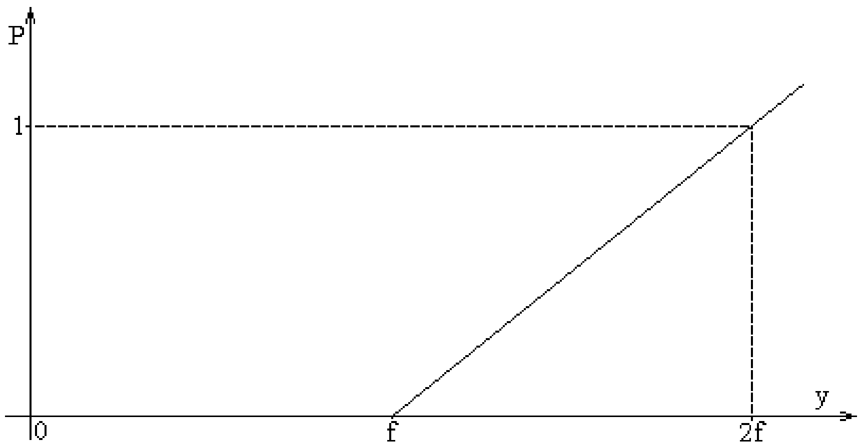
Mnożąc (7) przez odległość $y$ przedmiotu od soczewki otrzymujemy

$$\frac{y}{x} + 1 = \frac{y}{f} ,$$

uwzględniając (3) $$p = \frac{y}{f} - 1 . \qquad (15)$$

Otrzymaliśmy powiększenie $p$ w funkcji odległości przedmiotu od soczewki $y$ $(p = F(y))$.

Wykresem jest prosta o współczynniku kierunkowym $\frac{1}{f}$ przecinająca oś $y$ w punkcie $y = f$. Jeżeli $y = x$, wówczas $p = 1$, wtedy $y = 2f$.




Rys.4

Przy stałej odległości przedmiotu i ekranu istnieją dwa położenia soczewki, w których na ekranie otrzymamy ostre obrazy (powiększony i zmniejszony),

$$x + y = d = const ,$$

ale również $$y - x = b = const .$$

Rozwiązując ten układ otrzymujemy

$$x = \frac{d-b}{2} \qquad \text{oraz} \qquad y = \frac{d+b}{2} \quad .$$

Podstawiając te wartości do wzoru (7) dostaniemy

$$f = \frac{d^2 - b^2}{4d} \qquad \text{lub} \qquad 4f = d - \frac{b^2}{d} \quad . \qquad (16)$$

Żeby pomiar przeprowadzić prawidłowo musi być spełniony warunek $d > 4f$ .

Jeżeli mamy układ cienkich soczewek, to ogniskową takiego układu obliczymy z dużym przybliżeniem z zależności:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d'}{f_1 f_2} \quad , \qquad (17a)$$

gdzie: $f_1$ i $f_2$ - są odpowiednio ogniskami soczewek wchodzących do układu, a

$d'$ - odległością między środkami soczewek.

Jeżeli soczewki układu przylegają do siebie , wówczas $d' = 0$ , i

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad . \qquad (17)$$

W przypadku, gdy druga soczewka układu jest rozpraszająca wzór można zapisać w postaci:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} \quad ,$$

a stąd

$$f_2 = \frac{f f_1}{f_1 - f} \quad . \qquad (18)$$

## A. Wyznaczanie ogniskowej soczewki cienkiej z wykresu hiperboli.

1. Ustawić przedmiot za ogniskiem w odległości około 100 cm. Znaleźć ostry obraz na ekranie.
2. Zmierzyć odległość przedmiotu od ekranu.
3. Zmierzyć odległość przedmiotu od środka soczewki.
4. Powtórzyć czynności z punktów 1,2,3 zmieniając odległość przedmiotu od soczewki co 5 cm, następnie co 2 cm, następnie co 0,5 cm (zagęszczamy liczbę pomiarów w miarę zbliżania się do ogniska).
5. Pomiary 1,2,3,4, powtórzyć 3-krotnie . Znaleźć wartości średnie z 3 pomiarów.
6. Sporządzić wykres zależności (14).
7. Znaleźć graficznie współrzędne minimum krzywej (x,u), wyznaczyć ogniskową.
8. Przeprowadzić dyskusję wyników i błędów.

## B. Wyznaczanie ogniskowej soczewki cienkiej z wykresu prostej.

1. Ustawić na ławie optycznej oświetloną skalę milimetrową w odległości 100 cm od wyskalowanego ekranu.
2. Soczewkę ustawić w takiej odległości od oświetlonej skali milimetrowej, aby na ekranie pojawił się rzeczywisty obraz powiększony skali.
3. Zmierzyć odległość obrazu (ekranu) od środka soczewki.
4. Na wyskalowanym ekranie zmierzyć wysokość obrazu *H*.
5. Obliczyć powiększenie z zależności $p = \frac{H}{h}$.
6. Przesunąć soczewkę względem przedmiotu początkowo co 0,5 cm, potem co 1 cm,. ............co 5 cm (zwiększając przesunięcie o coraz to większy odcinek w miarę odsuwania soczewki od przedmiotu). Ustawienie ekranu regulować tak, aby otrzymać ostry obraz skali. Dokonać pomiarów i obliczeń jak w punktach 3, 4, 5.
7. Pomiary z punktów 1, 3, 4, 5, 6 powtórzyć 3-krotnie.
8. Sporządzić wykres zależności $p = f(y)$, dla każdej serii pomiarów.
9. Wyznaczyć z wykresu ogniskową.
10. Przeprowadzić dyskusję wyników.
11. Przeprowadzić rachunek i dyskusję błędów.

## C. Wyznaczanie ogniskowej soczewek cienkich metodą Bessela.

1. Ustawiać na ławie optycznej oświetlony przedmiot i ekran w odległości 1m (*d*).
2. Między ekranem a oświetlonym przedmiotem ustawić soczewkę tak, aby obraz na ekranie był rzeczywisty i powiększony. Wyznaczyć położenie soczewki $a_1$.
3. Przesunąć soczewkę w takie położenie, aby na ekranie otrzymać obraz rzeczywisty zmniejszony. Odczytać położenie soczewki $a_2$.
4. Obliczyć przesunięcie $a_2$ - $a_1$ = $b$.
5. Czynności przedstawione w punktach 2, 3, 4 powtórzyć 3-krotnie.
6. Zmienić odległość d i powtórzyć czynności z punktu 2, 3, 4, 5.
7. Czynności opisane w punktach 1-6 powtórzyć dla innych soczewek.
8. Wykonać obliczenia korzystając ze wzorów 16, a w przypadku układu soczewek również ze wzorów 17a, 17 lub18.
9. Przeprowadzić dyskusję wyników.
10. Wykonać rachunek i dyskusję błędów.

**Literatura:**

1. J.R.Meyer-Arendt - Wstęp do optyki.
2. S. Szczeniowski - Fizyka Doświadczalna T.IV, Optyka.
3. T. Dryński - Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki.
4. H. Szydłowski - Laboratorium fizyczne.