

ĆWICZENIE 10

WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA LEPKOŚCI CIECZY

Wprowadzenie

W strudze przepływającej cieczy każdemu jej punktowi można przypisać prędkość będącą funkcją położenia i czasu

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) .$$

W ten sposób tworzymy wektorowe pole prędkości. Jeżeli prędkość nie zależy od czasu

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z) ,$$

to przepływ cieczy jest ustalony. W cieczech rzeczywistych przy przemieszczaniu się jednych warstw względem drugich pojawiają się siły tarcia. Warstwa poruszająca się szybciej działa przyspieszająco na warstwę sąsiednią, a warstwa poruszająca się wolniej opóźniająco. Siły wywołujące te zjawiska są skierowane stycznie do danych warstw.

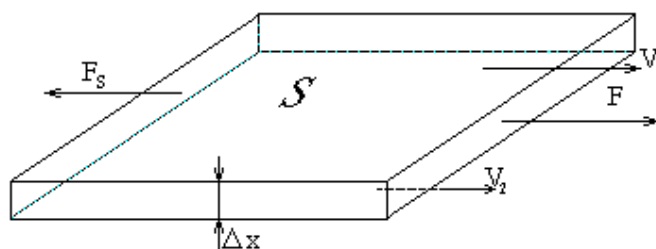
Jeżeli warstwa cieczy leżąca nad powierzchnią S porusza się szybciej (patrz rys. 10.1) niż warstwa S, to wywiera ona siłę F_1 przyspieszającą warstwę S, a warstwa cieczy leżąca pod nią, poruszająca się wolniej działa siłą hamującą F_2 . Siła wypadkowa działająca na warstwę S

$$F = F_1 - F_2 .$$

Ponieważ warstwa cieczy S porusza się ze stałą prędkością, więc siła F jest równoważona przez siłę tarcia F_s . Jak wskazuje doświadczenie

$$F_s \sim S \quad /1/$$

gdzie: S - jest powierzchnią warstwy przemieszczającej się.



Rys. 10.1

Siła tarcia wewnętrznego zależy również od wielkości różnicy prędkości ΔV w warstwach sąsiadujących z daną warstwą, odległych od siebie o Δx , do tej odległości, a więc

$$F_s \sim \frac{\Delta V}{\Delta x} , \quad /2/$$

czyli jest proporcjonalna do gradientu prędkości.

Wykorzystując proporcjonalności /1/ i /2/ możemy zapisać

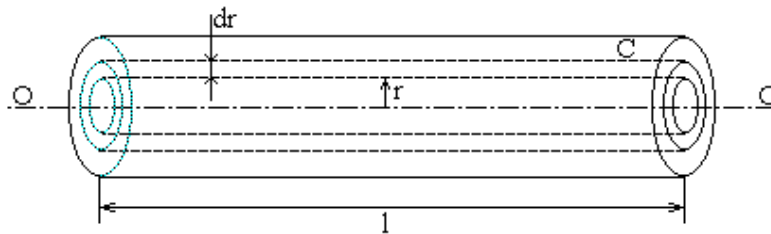
$$F_s = \eta \frac{\Delta V}{\Delta x} S, \quad /3/$$

gdzie: η jest dynamicznym współczynnikiem lepkości. Zależy on od rodzaju cieczy.

Tarcie wewnętrzne cieczy ściśle związane jest z jej ruchem. W odróżnieniu od gazów cząsteczki cieczy słabo przenikają z jednej warstwy do drugiej. Ponieważ zjawisko tarcia wewnętrznego związane jest z przenoszeniem pędu, to należy przypuszczać, że jedna warstwa cieczy przekazuje pęd drugiej w wyniku zderzeń cząsteczek bez przechodzenia samych cząsteczek z warstwy do warstwy.

Przepływ cieczy lepkiej przez rury.

Rozważmy przepływ laminarny lepkiej cieczy przez rurę. W przepływie laminarnym strugi cieczy w każdej chwili są do siebie równoległe. Wewnątrz cieczy rzeczywistej występuje tarcie wewnętrzne, którego skutkiem jest niejednakowa prędkość przepływu poszczególnych strug. W jednorodnej cieczy prędkość przepływu jest największa w środku rury i zmniejsza się do 0 przy ścianie. Aby otrzymać odpowiednie zależności weźmy rurę o promieniu wewnętrznym R i długości l , wypełnioną w całym przekroju przepływającą cieczą.



Rys. 10.2

Wytnijmy wewnątrz takiego walca cylinder współosiowy o promieniu wewnętrznym r i grubości ścianek dr . Na warstwę cieczy zawartą w tym cylindrze działa od wewnątrz przyspieszająca ją siła równa sile tarcia wewnętrznego (wywołana szybszym ruchem warstwy wewnętrznej cieczy), którą zgodnie z /3/ opiszemy wzorem

$$F_s = \eta \frac{dV}{dr} S, \quad /4/$$

gdzie: $S = 2\pi r l$.

Zatem

$$F = 2\pi\eta l r \frac{dV}{dr}. \quad /5/$$

Warstwy cieczy leżące na zewnątrz rozpatrywanego cylindra C płyną wolniej, a więc od zewnątrz na warstwę cylindryczną działa siła hamowania

$$F_1 = -(F + dF)$$

(znak minus oznacza tu hamowanie).

Siła wypadkowa działająca na warstwę cylindryczną C

$$F_1 + F = -dF$$

(zapis wykonujemy bez wektorów, ponieważ kierunki działających sił są takie same). Różniczkując wyrażenie /5/ otrzymujemy:

$$-dF = -2\pi\eta l d\left(r \frac{dV}{dr}\right). \quad /6/$$

Siły pochodzące od warstw zewnętrznych i wewnętrznych cieczy działające na warstwę C są równoległe ale przeciwnie skierowane. Prędkość cieczy w środku rury jest największa, zatem zmiana prędkości do środka rury jest dodatnia, podczas gdy promień maleje więc $dV/dt < 0$, stąd siła wypadkowa działająca na warstwę C, $-dF > 0$ i ma zwrot prędkości cząsteczek cieczy.

Ponieważ przepływ jest ustalony mamy więc równowagę dynamiczną (tyle cieczy wpływa do danego obszaru co wypływa), i siła $-dF$ winna być równa sile działającej na warstwę C powstającej wskutek różnicy ciśnień na początku cylindra i na jego końcu, przy założeniu, że ciecz płynie od strony lewej do prawej. Ta siła jest różnicą parcia wywieranego na podstawę lewą i prawą cylindra, zatem

$$dF' \sim dS',$$

gdzie:

$$dS' = 2\pi r dr,$$

lub w postaci równania

$$dF' = 2\pi r dr (p_1 - p_2), \quad /7/$$

przy czym p_1 i p_2 są ciśnieniami wywieranymi odpowiednio na lewą i prawą podstawę cylindra C. Warunek stacjonarności ruchu wymaga, aby

$$-dF = dF',$$

więc po uwzględnieniu /6/ i /7/ mamy

$$-2\pi\eta l d\left(r \frac{dV}{dr}\right) = 2\pi r (p_1 - p_2) dr.$$

Po przekształceniu

$$d\left(r \frac{dV}{dr}\right) = \frac{-(p_1 - p_2)}{\eta l} r dr.$$

Całkując ostatni związek otrzymamy.

$$r \frac{dV}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r^2 + C_1, \quad /8/$$

gdzie: C_1 - stała.

Aby wyznaczyć stałą C_1 nałożmy warunki brzegowe dla $r = 0$,
 $dV/dr = 0$ (zmiana prędkości na osi rury jest równa 0).
 Po podstawieniu ich do równania /8/ otrzymujemy $C_1 = 0$. Zatem wyrażenie /8/ przyjmuje postać

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r ,$$

a całkując ostatecznie otrzymujemy

$$V = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C_2 , \quad /9/$$

gdzie: C_2 - stała.

Jeżeli $r = R$, to $V = 0$, więc

$$0 = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2 + C_2 ,$$

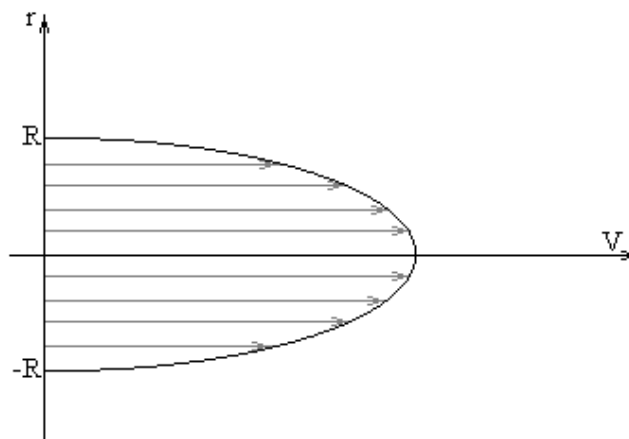
a stąd

$$C_2 = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2 ,$$

to równanie /9/ da się zapisać jako:

$$V = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2) . \quad /10/$$

Wzór /10/ opisuje zależność prędkości cieczy od odległości od osi rury. Zależność ta ma charakter paraboliczny. Rozkład prędkości cieczy lepkiej w ruchu laminarnym w przekroju rury podlega prawu parabolicznemu, pokazuje to wykres na rys. 10.3.



Rys. 10.3.

Z warstwy cylindrycznej C o promieniu wewnętrznym r grubości dr w czasie t wypływa ciecz o objętości

$$d\vartheta = 2\pi V t r dr . \quad /11/$$

Uwzględniając /10/ wzór /11/ możemy przedstawić w postaci:

$$d\vartheta = \pi \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} t (R^2 - r^2) r dr \quad /12/$$

Objętość cieczy przepływającej przez cały przekrój rury otrzymamy całkując /12/ w granicach od 0 do R. Czyli

$$\vartheta = \pi \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} t \int_0^R (R^2 r - r^3) dr .$$

Skąd

$$\vartheta = \pi \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} t \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) ,$$

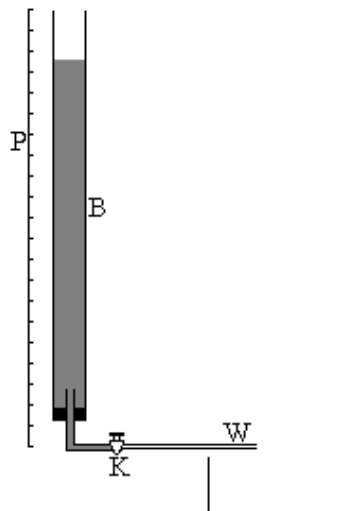
a po wykonaniu działań

$$\vartheta = \frac{R^4 \pi t (p_1 - p_2)}{8\eta l} . \quad /13/$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzór Poiseuille'a.

A. Pomiar współczynnika lepkości wody

Opis urządzenia



Rys. 10.4

Układ składa się ze statywu z podziałką milimetrową P oraz rury szklanej B o długości około 1,3 m. W dolnej części rury zatkanej korkiem zamocowano rurkę z kranem K, do której podłączono kapilarę W. Poziom wylotu kapilary pokrywa się z 0 podziałki milimetrowej.

Metoda pomiaru

Objętość cieczy wypływającej w jednostce czasu przez otwór rurki kapilarnej W obliczamy ze wzoru /13/.

$$\frac{\vartheta}{t} = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8\eta l} R^4 = \vartheta_1 \quad /14/$$

W czasie dt przez kapilarę wypłynie objętość $\vartheta_1 dt$ cieczy, spowoduje to obniżenie poziomu cieczy w rurce o dh . Objętość cieczy jaka wypłynęła przez kapilarę W jest równa objętości o jaką zmniejszyła się objętość cieczy w rurce, z czego wynika równość

$$\vartheta_1 dt = -S_1 dh, \quad /15/$$

(znak minus pochodzi stąd, że wysokość h maleje w czasie pomiaru). Różnica ciśnienia na końcach kapilary jest równa ciśnieniu hydrostatycznemu słupa cieczy

$$p_1 - p_2 = \rho gh, \quad /16/$$

gdzie: ρ - gęstość cieczy,

g - przyspieszenie ziemskie.

Uwzględniając wzór /14/ i /16/ związek /15/ zapiszemy w postaci:

$$\frac{\pi \rho g h}{8\eta l} R^4 dt = -S_1 dh,$$

lub rozdzielając zmienne

$$\frac{dh}{h} = \frac{\pi \rho g R^4}{8\eta l S_1} dt.$$

Całkując ostatecznie otrzymujemy

$$\ln h = -\frac{\pi \rho g R^4 t}{8\eta l S_1} + C_3. \quad /17/$$

Jeżeli $t = 0$, to $h = h_0$ (słup wody na początku pomiaru jest najwyższy), a więc

$$\ln h_0 = C_3.$$

Równanie /17/ przyjmie postać

$$\ln h = \ln h_0 - kt, \quad /18/$$

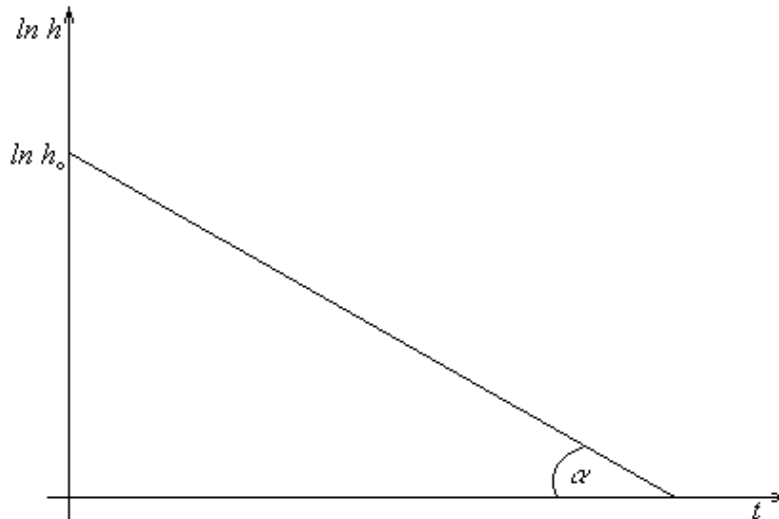
gdzie

$$k = \frac{\pi \rho g R^4}{8\eta l S_1}, \quad /19/$$

$$\text{ale } S_1 = \pi R_1^2 = \frac{\pi}{4} D^2,$$

gdzie: $D = 2 R_1$ - jest średnicą rurki.

W układzie współrzędnych $(\ln h, t)$ wykres funkcji /18/ jest linią prostą o tangensie kąta nachylenia k



Rys. 10.5.

$$\operatorname{tg} \alpha = k \quad /20/$$

Ze wzorów /19/ i /20/ otrzymujemy

$$\eta = \frac{\rho g R^4}{2 l D^2 \operatorname{tg} \alpha} \quad /21/$$

Z równania /18/ łatwo otrzymać postać wykładniczą funkcji $h(t)$

$$h = h_0 \exp\left(-\frac{\rho g R^4}{2 \eta l D^2} t\right) \quad /22/$$

Zauważmy, że po pewnym czasie $t = T$, $h = h_0/2$, wtedy

$$\frac{h_0}{2} = h_0 \exp\left(-\frac{\rho g R^4}{2 \eta l D^2} T\right),$$

stąd

$$\ln 2 = \frac{\rho g R^4}{2 \eta l D^2} T,$$

oraz

$$\eta = \frac{\rho g R^4 T}{2 l D^2 \ln 2} \quad /23/$$

Jeżeli $t = 2T$, to $h = h_0/4$ wzór /23/ przybierze postać

$$\eta = \frac{\rho g R^4 T}{l D^2 \ln 4} \quad /24/$$

Podobnie dla $t = nT$, $h = h_0/2^n$, oraz

$$\eta = \frac{n}{2} \frac{\rho g R^4 T}{l D^2 \ln 2^n} \quad /25/$$

Przebieg pomiarów

1. Mierzmy średnicę D rury B, długość l kapilary C i jej promień R (może być podany przez asystenta).
 2. Pomiary z punktu 1 powtarzamy 5-cio krotnie i obliczamy średnią wartość D i l .
 3. Napełniamy rurę B wodą destylowaną przy zamkniętym kranie K do wysokości $H > h_0$.
 4. Otwieramy kran K i włączamy stoper w chwili, gdy poziom wody osiąga wartość h_0 (ustaloną przez asystenta).
 5. Odczytujemy wskazania stopera odpowiadające zmianie wysokości słupa wody w rurce B co 0,05 m (0,1 m).
 6. Powtarzamy czynności z punktu 3 i 4.
 7. Odczytujemy czasy odpowiadające wysokościami $\frac{h_0}{2}$, $\frac{h_0}{4}$ i $\frac{h_0}{8}$.
 8. Sporządzamy wykres funkcji $h = f(t)$.
 9. Sporządzamy wykres funkcji $\ln h = f(t)$.
 10. Znajdujemy graficznie tg kąta nachylenia i szacujemy błędy.
 11. Obliczamy współczynnik lepkości ze wzoru /21/.
 12. Obliczamy współczynniki lepkości ze wzorów /23/, /24/ i /25/.
 13. Obliczamy błędy.
 14. Przeprowadzamy dyskusję wyników.
- UWAGA ! Stałe ρ i g należy wziąć z tablic, przy czym, przy odczycie gęstości wody zwrócić uwagę na temperaturę.

B. Wyznaczanie lepkości wody przy pomocy ważenia.

Do wykonania pomiaru wykorzystujemy aparaturę taką samą jak w części A.

Metoda pomiaru

Wykorzystujemy wzór Poiseuille'a /13/. Ciśnienie między końcami kapilary jest równe ciśnieniu hydrostatycznemu słupa cieczy

$$p_1 - p_2 = \rho g h .$$

Jeżeli stoper włączymy w chwili gdy z kapilary zacznie wypływać woda do naczynia, to objętość wody jaka wypłynie w czasie t możemy obliczyć ze wzoru

$$v = \frac{m_w}{\rho} ,$$

gdzie: $m_w = m_l - m_n$ jest masą wody zebraną w naczyniu o masie m_n w czasie t .
 m_l - to masa naczynia i wody.

Ostatecznie

$$v = \frac{m_1 - m_n}{\rho} .$$

Po podstawieniu do wzoru /13/ i prostym przekształceniu otrzymujemy

$$\eta = \frac{\pi \rho^2 R^4 h t g}{8 l (m_1 - m_n)} . \quad /26/$$

Przebieg pomiarów

1. Mierzmy długość kapilary l oraz jej promień R . Pomiar powtarzamy pięciokrotnie. Do obliczeń bierzemy wartości średnie. (Wartość promienia R może być podana przez asystenta).
2. Wyznaczamy masę naczynia pustego, do którego zbieramy ciecz wypływającą z kapilary.
3. Napełniamy wodą rurę B przy zamkniętym kranie K.
4. Otwieramy kran K. W momencie pojawienia się pierwszej kropli u wylotu kapilary włączamy stoper i odczytujemy wysokość słupa h .
5. Wodę zbieramy do naczynia przez czas t .
6. Wyznaczamy masę wody i naczynia.
7. Czynności opisane w punktach 3 - 7 powtarzamy dla innych przedziałów czasu t .
8. Z tablic wyszukujemy wartości ρ dla wody w zależności od temperatury i przyspieszenie ziemskie g .
9. Obliczamy oddzielnie współczynnik lepkości dla każdej serii pomiarów opisanych w punkcie 7, korzystając ze wzoru /26/.
10. Przeprowadzamy dyskusję wyników i rachunek błędów.
11. Wyciągamy wnioski.

C. Badanie zależności współczynnika lepkości wody od temperatury.

Pomiar współczynnika lepkości może być wykonany jedną z metod opisanych w części A lub B. Do napełnienia cylindra podczas pomiarów używamy wody o temperaturze niższej od temperatury otoczenia o około 10°C , wody w temperaturze otoczenia oraz wody o temperaturze wyższej od temperatury otoczenia o ok. 10°C . Temperaturę wody mierzymy w naczyniu, do którego zbieramy wodę z kapilary.