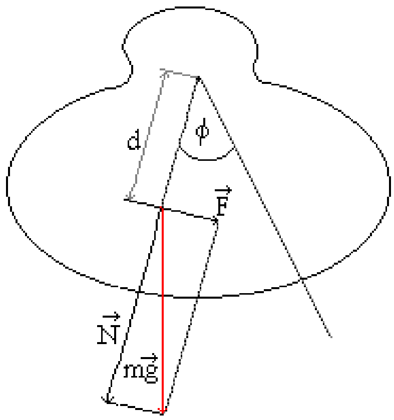
ĆWICZENIE 8

POMIAR MOMENTU BEZWŁADNOŚCI PRZY POMOCY WAHADŁA FIZYCZNEGO ORAZ BADANIE ZALEŻNOŚCI DŁUGOŚCI WAHADŁA ZREDUKOWANEGO OD ODLEGŁOŚCI ŚRODKA CIĘŻKOŚCI OD OSI OBROTU

Wprowadzenie

Wahadłem fizycznym jest każda bryła sztywna o masie m zawieszona w punkcie O znajdującym się powyżej jej środka ciężkości. Takie zawieszenie umożliwia jego ruch w polu grawitacyjnym. Po wychyleniu bryły z położenia równowagi o kąt ϕ pojawia się różny od zera moment siły F wymuszający drganie obrotowe ciała wokół poziomej osi.
Moment siły

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F} \cdot$$



Rys. 8.1.

Różniczkowe równanie ruchu wahadła możemy zapisać w postaci

$$\vec{M} = J \frac{\vec{d}^2 \phi}{dt^2}, \qquad /1/$$

gdzie: J - moment bezwładności wahadła względem osi obrotu,
ϕ - kąt o jaki wychyli się wahadło.

Jeżeli założymy, że wahadło porusza się ruchem płaskim, to równanie /1/ we współrzędnych biegunowych (gdzie biegunem jest punkt zaczepienia wahadła) możemy zapisać wzorem:

$$M = J \frac{d^2 \phi}{dt^2}, \qquad /2/$$

przy czym

$$M = -mgd \sin \phi,$$

gdzie: d - jest odległością środka masy od osi obrotu.

Zatem

$$J\frac{d^2\phi}{dt^2} = -mgd\sin\phi \ ,$$

lub

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{mgd}{J}\sin\phi = 0 . \qquad /3/$$

W wyniku całkowania tego równania (patrz ćwiczenie 2), otrzymujemy wzór na okres

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right) sin^2\frac{\phi_0}{2}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 sin^2\frac{\phi_0}{2}+...+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{(n+1)^2}{(2n-1)}\right)^2 sin^4\frac{\phi_0}{2}\right], \qquad /4/$$

gdzie: ϕ_0- kąt wychylenia początkowego.

Ponieważ wyrazy szeregu we wzorze /4/ z wyjątkiem pierwszego są mniejsze od 1, szereg jest dość szybko zbieżny. Przy niewielkich wychyleniach możemy wzór /4/ przybliżyć przez odrzucenie wszystkich wyrazów wyższych niż drugie, oraz zastąpić $\sin\phi_0/2$ miarą łukową kąta $\phi_0/2$, wzorem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}\left(1+\frac{\phi_0^2}{16}\right), \qquad /5/$$

stąd możemy obliczyć moment bezwładności

$$J = \frac{mgdT^2}{4\pi^2\left(1+\frac{\phi_0^2}{16}\right)^2} \ , \qquad /6/$$

gdzie ϕ_0 - bierzemy w radianach.

Okres wahadła matematycznego przy niewielkich wychyleniach obliczamy ze wzoru

$$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{l_m}{g}}\left(1+\frac{\phi_0^2}{16}\right)$$

Długość wahadła matematycznego, którego okres jest równy okresowi wahadła fizycznego nazywamy długością zredukowaną l_r .

Z równości $T_m = T$ wynika

$$\sqrt{\frac{l_r}{g}} = \sqrt{\frac{J}{mgd}} \ ,$$

stąd

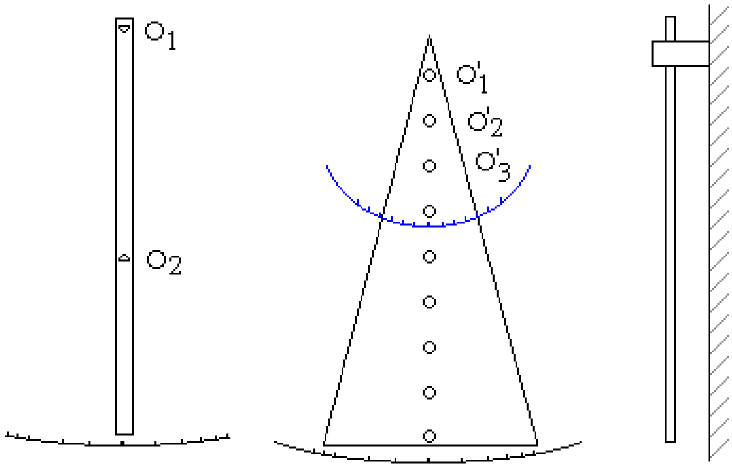
$$l_r = J/md . \qquad /7/ \ .$$

Uwzględniając /6/ wzór /7/ możemy zapisać w postaci

$$l_r = \frac{gT^2}{4\pi^2\left(1+\frac{\phi_0^2}{16}\right)^2} \ . \qquad /8/$$

Opis urządzenia.

Urządzenie składa się z dwóch wahadeł fizycznych. Jednego w kształcie rury metalowej, w której są osadzone dwa pryzmaty (O_1 ,O_2) zwrócone do siebie ostrzami. Jeden z tych pryzmatów osadzony jest bardzo blisko końca krawędzi rury, drugi w odległości 1/3 długości rury od drugiego końca krawędzi. Drugiego w kształcie trójkąta równoramiennego, w którym wzdłuż dwusiecznej w równych odstępach wycięto otwory służące do zawieszania na osi w kształcie pryzmatu ostrzem skierowanego do góry. Oba wahadła mogą wykonywać wahania na tle skali kątowej.



rys. 8.2.

Metoda pomiaru.

Moment bezwładności wahadła w kształcie rury względem środka ciężkości podaje wzór

$$J_0 = \frac{1}{4} m \left(R^2 + r^2 + \frac{1}{3} l^2 \right), \qquad /9/$$

gdzie: m - masa wahadła,
R - promień zewnętrzny rury,
r - promień wewnętrzny rury,
l - długość wahadła.

Moment bezwładności względem pierwszej czy drugiej osi obrotu obliczymy z twierdzenia Steinera

$$J = J_0 + md^2_{1\,\mathrm{lub}\,2} , \qquad /10/$$

gdzie: d_1 - odległość środka ciężkości od ostrza pierwszego pryzmatu,
d_2 - odległość środka ciężkości od ostrza drugiego pryzmatu.

Przyspieszenie ziemskie

$$g = \frac{4\pi^2 J\left(1+\frac{\phi_0^2}{16}\right)^2}{dmT^2} \qquad /11/$$

lub po uwzględnieniu /9/ i /10/

$$g = \frac{4\pi^2\left(1+\frac{\phi_0^2}{16}\right)^2\left[\frac{1}{4}\left(R^2+r^2+\frac{1}{3}l^2\right)+d_i^2\right]}{d_i T^2}\,. \qquad /12/$$

Ostatni wzór pozwala na obliczenie przyspieszenia ziemskiego przy pomocy wahadła fizycznego. Zawieszając drugie wahadło w różnych punktach i dokonując pomiaru okresu wahań, obliczamy moment bezwładności dla różnych zawieszeń ze wzoru /5/. Okres wahań wahadła fizycznego zależy min. od punktu zawieszenia, a zatem i od odległości osi obrotu od środka ciężkości. Wzór /7/ pozwala pośrednio określić zależności długości zredukowanej od położenia osi obrotu względem środka ciężkości.

Przebieg pomiarów.

1. Wykonujemy pomiary wymiarów geometrycznych wahadła fizycznego w kształcie rury.
2. Zawieszamy pierwsze wahadło na pryzmacie O_1 i dokonujemy pomiaru czasu 20 wahnięć dla wychylenia początkowego 5^o .
3. Pomiary powtarzamy dla wychyleń 7^o i 9^o .
4. Zawieszamy wahadło na drugim pryzmacie O_2 i wykonujemy pomiary jak w punkcie 2 i 3.
5. Obliczamy przyspieszenie grawitacyjne dla każdego pomiaru ze wzoru /12/.
6. Obliczamy wartość średnią przyspieszenia.
7. Zawieszamy drugie wahadło na pryzmacie przetykając go przez otwór O'_1 i mierzymy czas 20 wychyleń. Kąt wychylenia początkowego przyjmujemy 5^o .
8. Obliczamy moment bezwładności ze wzoru /6/ biorąc średnie przyspieszenie grawitacyjne obliczone w pierwszej części ćwiczenia.
9. Pomiary z punktu /7/ powtarzamy przetykając pryzmat przez kolejne otwory O'_2 i O'_3... .
10. Obliczamy długość zredukowaną za wzoru /7/ lub /8/ dla różnych zawieszeń.
11. Przeprowadzamy rachunek błędów, korzystając z metody różniczki zupełnej odpowiednio szacując błędy pomiarowe pozostałych wartości.
12. Sporządzamy wykres zależności $l_r = f(d)$.
13. Przeprowadzamy dyskusję błędów i wyników pomiarowych.
14. Formułujemy wnioski.