ĆWICZENIE 7

WYZNACZANIE LOGARYTMICZNEGO DEKREMENTU TŁUMIENIA ORAZ WSPÓŁCZYNNIKA OPORU OŚRODKA.

Wprowadzenie

Ciało drgające w rzeczywistym ośrodku z upływem czasu zmniejsza amplitudę drgań, maleje energia mechaniczna poruszającego się ciała zamieniając się w energię wewnętrzną ośrodka, w którym porusza się ciało oraz w energię wewnętrzną ciała poruszającego się. Straty energetyczne zależą od rodzaju ośrodka oraz od kształtu ciała uczestniczącego w ruchu.
Ciało w ośrodku rzeczywistym porusza się ruchem drgającym nieswobodnym. Doznaje zatem oporów ruchu. Siła oporu ośrodka zależy od prędkości poruszającego się ciała. Dla małych prędkości możemy uważać, że siła oporu

$$F \sim V,$$

lub w postaci równania

$$F = - b\, V,$$

gdzie: b - jest współczynnikiem oporu zależnym od kształtów ciała i rodzaju ośrodka.

Znak minus oznacza, że siła oporu jest zawsze przeciwna względem wektora prędkości. Wartość liczbowa b równa jest sile działającej na ciało poruszające się z jednostkową prędkością. Różniczkowe równanie ruchu ciała drgającego w ośrodku stawiającym opór możemy zapisać w postaci

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx,$$

gdzie: $\frac{dx}{dt} = V$.

Po uporządkowaniu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Oznaczając $\frac{b}{m} = 2\beta$, oraz $\frac{k}{m} = \omega^2$ otrzymamy równanie:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0. \qquad /1/$$

Jest to jednorodne różniczkowe równanie drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Charakter rozwiązania tego równania zależy od wartości współczynnika β. Przypuśćmy, że całką szczególną równania jest wyrażenie

$$x = e^{\alpha}. \qquad /2/$$

Aby wyznaczyć współczynnik α należy całkę /2/ po zróżniczkowaniu odpowiednio podstawić do równania /1/. Otrzymamy wówczas:

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + 2\alpha\beta e^{\alpha t} + \omega^2 e^{\alpha t} = 0 \, .$$

Stąd łatwo zauważyć, że

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \omega^2 = 0 \qquad /3/$$

jest równaniem charakterystycznym.

Jeżeli wyróżnik równania charakterystycznego jest większy od zera, wówczas mamy do czynienia z ruchem aperiodycznym.

Rozwiązanie ogólne

$$x = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} ,$$

gdzie: $\alpha_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 + \omega^2}$ i $\alpha_2 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$,

lub

$$x = e^{-\beta t}\left(Ae^{\sqrt{\beta^2 - \omega^2}\, t} + Be^{-\sqrt{\beta^2 - \omega^2}\, t} \right) . \qquad /4/$$

Stałe *A* i *B* wyznaczamy z warunków początkowych np.: dla t = 0 żądamy aby:

$$x = 0 \text{ i } V = V_{0.} \qquad /5/$$

Zauważmy, że $V = dx/dt$, zatem

$$V = -\beta e^{-\beta t}\left(Ae^{\sqrt{\beta^2 - \omega^2}\, t} + Be^{-\sqrt{\beta^2 - \omega^2}\, t} \right) + e^{-\beta t}\left(A\sqrt{\beta^2 - \omega^2}\, e^{\sqrt{\beta^2 - \omega^2}\, t} - B\sqrt{\beta^2 - \omega^2}\, e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega^2}\, t} \right) .$$

Nakładając warunki /5/ w równaniach /4/ i powyższym, otrzymujemy układ równań algebraicznych:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -\beta(A + B) + \sqrt{\beta^2 - \omega^2}\,(A - B) = V_0 \end{cases} ,$$

które rozwiązujemy względem stałych *A* i *B*. Po prostych przekształceniach dostajemy:

$$A = \frac{1}{2}\frac{V_0}{\sqrt{\beta^2 - \omega^2}} \quad \text{i} \quad B = -\frac{1}{2}\frac{V_0}{\sqrt{\beta^2 - \omega^2}} .$$

Ostatecznie kinematyczne równanie ruchu /4/ da się zapisać w postaci

$$x = \frac{1}{2}\frac{V_0}{\sqrt{\beta^2 - \omega^2}}\, e^{-\beta t}\left(e^{\sqrt{\beta^2 - \omega^2}\, t} - e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega^2}\, t} \right) , \qquad /7/$$

lub

$$x = \frac{V_0}{\sqrt{\beta^2 - \omega^2}}\, e^{-\beta t} \sinh\left(\sqrt{\beta^2 - \omega^2}\, t \right) .$$

Jeżeli wyróżnik równania /3/ jest mniejszy od zera tzn. $\Delta = \beta^2 - \omega^2 \langle 0$, to możemy zapisać $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{\omega^2 - \beta^2}$, gdzie $\omega^2 - \beta^2 \rangle 0$ a *i* jest jednostką urojoną $i = \sqrt{-1}$. Przyjmując, że w chwili początkowej *t* = 0 ciało znajdowało się w położeniu równowagi i poruszało się z prędkością V_0 (co odpowiada warunkom

/5/) rozwiązanie równania /1/ otrzymujemy w postaci /7/ dokonując w nim podstawień

$$\sqrt{\beta^2-\omega^2} \to i\sqrt{\omega^2-\beta^2}\,.$$

Zatem

$$x=\frac{1}{2}\frac{V_0}{i\sqrt{\omega^2-\beta^2}}e^{-\beta t}\left(e^{i\sqrt{\omega^2-\beta^2}\,t}-e^{-i\sqrt{\omega^2-\beta^2}\,t}\right),$$

lub po wykorzystaniu wzoru Eulera

$$x=\frac{V_0}{\sqrt{\omega^2-\beta^2}}e^{-\beta t}\sin\left(\sqrt{\omega^2-\beta^2}\,t\right). \qquad /8/$$

Jeżeli wyróżnik równania /3/ $\Delta = 0$, wówczas rozwiązanie możemy zapisać w postaci

$$x=e^{\alpha t}\left(A'+B't\right), \qquad /9/$$

gdzie: $\alpha = -\beta$.

Obliczając $V=\frac{dx}{dt}=-\beta e^{-\beta t}\left(A'+B't\right)+B'e^{-\beta t}$, oraz nakładając warunki /5/ otrzymamy układ równań algebraicznych względem stałych A',B':

$$\begin{cases}A'=0\\ B'=V_0\end{cases}.$$

Co pozwala zapisać rozwiązanie /9/ w postaci

$$x=V_0te^{-\beta t}. \qquad /10/$$

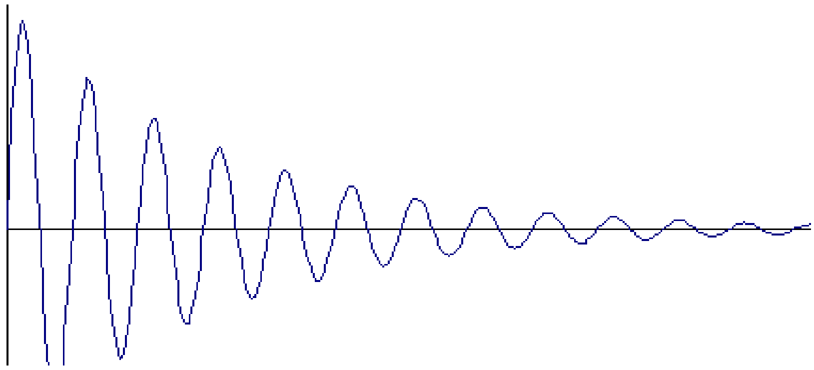
Rozwiązanie /10/ odpowiada tzw. przypadkowi granicznemu kiedy to ciało wykonuje wychylenie, z którego powrót do stanu równowagi zmienia się w zależności od czasu jak funkcja wykładnicza. Najbardziej interesującym nas przypadkiem jest przypadek opisany rozwiązaniem /8/. Odpowiada on drganiom periodycznym o malejącej wykładniczo amplitudzie

$$A=\frac{V_0}{\sqrt{\omega^2-\beta^2}}e^{-\beta t}, \qquad /11/$$

lub

$$A=A_0e^{-\beta t}.$$

Szybkość zaniku drgań zależy od wartości współczynnika β. Wykres wychylenia w funkcji czasu (patrz równanie 9) przedstawia rysunek poniżej.



Niech A_N i A_{N+1} oznaczają kolejno po sobie nastające amplitudy wyrażające się odpowiednio wzorami:

$$A_N = A_0 e^{-\beta t}$$

i

$$A_{N+1} = A_0 e^{-\beta(t+T)},$$

gdzie: T - okres drgań,

to $$\frac{A_N}{A_{N+1}} = e^{\beta T}$$ i $$\ln\frac{A_N}{A_{N+1}} = \beta T = D,$$

gdzie: D - nazywamy dekrementem tłumienia.

Współczynnik tłumienia obliczamy ze wzoru $\beta = D/T$, ale $\beta = b/2m$;

stąd $$b = \frac{2mD}{T}. \qquad /12/$$

Logarytmiczny dekrement tłumienia obliczyć można z dwóch dowolnych lecz ściśle określonych w czasie amplitud, np. amplitudy A_N i A_{N+k}, gdzie k jest liczbą naturalną związaną z czasem obserwacji t i okresem drgań T wzorem $t = kT$,

$$kD = \sum_{l=0}^{l=k-1} \ln\frac{A_{N+l}}{A_{N+l+1}} = \ln\prod_{l=0}^{l=k-1}\frac{A_{N+l}}{A_{N+l+1}} = \ln\frac{A_N}{A_{N+k}}.$$

W ten sposób

$$D = \frac{1}{k}\ln\frac{A_N}{A_{N+k}}, \qquad /13/$$

Opis urządzenia pomiarowego.

Urządzenie pomiarowe składa się z wahadła grawitacyjnego z wymiennymi obciążnikami (ze wskazówką) zawieszonymi na dwóch długich słabo rozciągliwych nitkach. Podczas wahań wskazówka obciążnika przesuwa się na tle regulowanej skali milimetrowej. Płaszczyzna drgań jest prostopadła do odpowiedniej płaszczyzny przekroju obciążnika. Wychylenie wahadła na tle skali obserwujemy przy pomocy soczewki dyfrakcyjnej.

Przebieg pomiarów.

1. Wahadło wprawiamy w drgania ściśle płaskie po uprzednim stwierdzeniu, że punkt równowagi wahadła pokrywa się z zerem skali milimetrowej.
2. Odczytujemy na podziałce, (z tej samej strony położenia równowagi) kolejne amplitudy wykonując kilkanaście odczytów. Pomiary powtarzamy zaczynając zawsze od tej samej amplitudy początkowej.
3. Sporządzamy wykres krzywej tłumienia $A_N = f_1(t)$ odkładając na osiach układu amplitudę mierzoną w mm, a czas w okresach.
4. Sporządzamy wykres jak w punkcie 3 funkcji $\ln A_N = f_2(t)$.
5. Obliczamy logarytmiczny dekrement tłumienia. Potrzebne amplitudy odczytujemy z krzywej tłumienia w różnych jej miejscach. Obliczamy wartość średnią logarytmicznego dekrementu tłumienia.
6. Wyznaczamy średni okres drgań wahadła mierząc kilkakrotnie czas trwania n drgań. (Liczbę n poda prowadzący zajęcia np. n=100).
7. Wyznaczamy masę wahadła na wadze laboratoryjnej.
8. Obliczamy współczynnik oporu ze wzoru /12/.
9. Powtarzamy pomiary dla wahadeł o innych kształtach.
10. Przeprowadzamy ocenę błędów.
11. Wyciągamy wnioski.

Ocena błędów.

1. Błąd maksymalny przy pomiarze amplitudy określamy biorąc pod uwagę najmniejszą podziałkę skali oraz rozrzut punktów pomiarowych na płaszczyźnie A,t.
2. Przy oszacowywaniu maksymalnego błędu pomiaru dekrementu korzystamy z metody różniczki zupełnej wykorzystując wzór /13/.

$$|\Delta D| = \frac{1}{k}\left(\frac{A_N + A_{N+k}}{A_N A_{N+k}}\right)|\Delta A_N| .$$

3. Błąd pomiaru okresu określamy z błędu pomiaru czasu obserwacji.

$$\Delta T = \frac{\Delta(nT)}{n} ,$$

gdzie: n - liczba zaobserwowanych drgań,

$\Delta(nT)$ - błąd zależny od najmniejszej działki stopera oraz przyjętego błędu reakcji uruchomienia i zatrzymania stopera.

4. Maksymalny błąd pomiaru współczynnika tłumienia obliczamy metodą różniczkowania logarytmicznego

$$|\Delta b| = b\left(\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta m}{m}\right) .$$