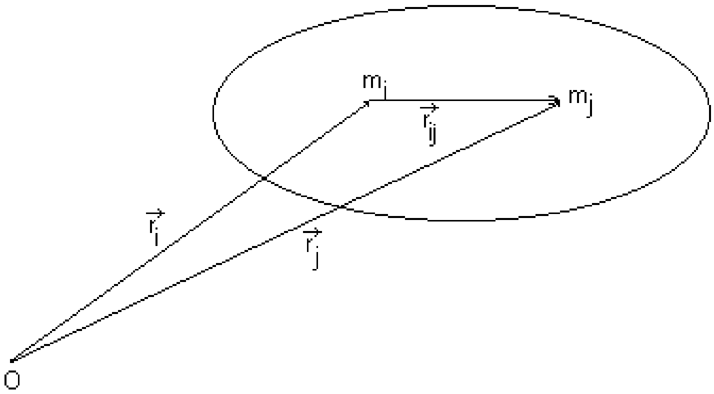
ĆWICZENIE 6

POMIAR MOMENTU BEZWŁADNOŚCI . SPRAWDZENIE DRUGIEJ ZASADY DYNAMIKI DLA RUCHU OBROTOWEGO. BADANIE ADDYTYWNOŚCI MOMENTU BEZWŁADNOŚCI

Wprowadzenie

Bryła sztywna to układ punktów materialnych o stałych odległościach wzajemnych. Jeżeli położenie dowolnych punktów należących do bryły sztywnej opiszemy przy pomocy promieni wodzących $\vec{r}_i$ i $\vec{r}_j$, to matematyczny model bryły możemy przedstawić wzorem:

$$\vec{r}_{ij}^{\,2} = \left(\vec{r}_j - \vec{r}_i\right)^2 = const. \qquad /1/$$



O - punkt odniesienia
Rys. 6.1.

Różniczkując wzór /1/ otrzymujemy

$$d\left(\vec{r}_{ij}^{\,2}\right) = 2\vec{r}_{ij}\, d\vec{r}_{ij} = 0. \qquad /2/$$

Stąd wynika, że $d\vec{r}_{ij} = 0$ (co oznacza warunek nieodkształcalności bryły), albo

$$\vec{r}_{ij} \perp d\vec{r}_{ij}$$

(co wskazuje, że wzajemne przemieszczenia punktów w bryle są możliwe tylko w kierunku prostopadłym do wektorów $\vec{r}_{ij}$ łączących punkty - odpowiada to obrotom).

Bryła sztywna może uczestniczyć w ruchu obrotowym, postępowym lub kombinacji ruchów obrotowego i postępowego. Elementarne przemieszczenie związane z obrotem

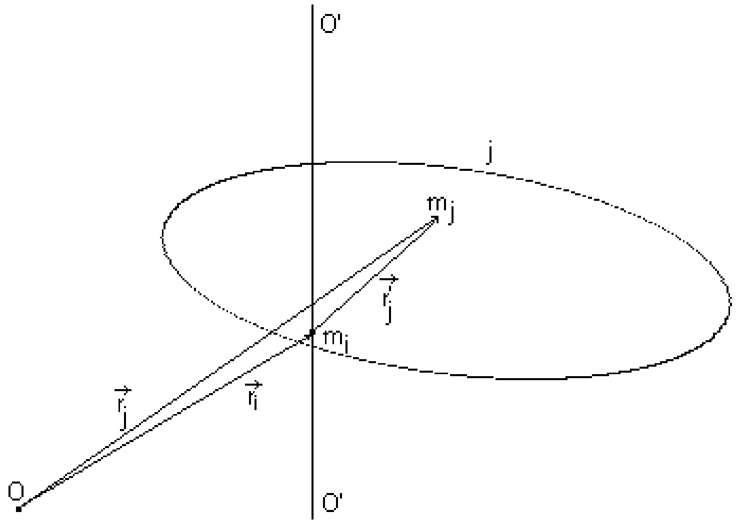
$$d\vec{r}_{ij} = d\vec{\phi} \times \vec{r}_{ij} , \qquad /3/$$

gdzie: $d\vec{\phi}$ - jest kątem elementarnego obrotu.
Całkowite przemieszczenie elementarne

$$d\vec{r}_j = d\vec{r}_t + d\vec{r}_{ij}$$

$d\vec{r}_t$ - przesunięcie translacyjne,
lub

$$d\vec{r}_j = d\vec{r}_t + d\vec{\phi} \times \vec{r}_{ij} \quad . \qquad /4/$$



Rys. 6.2.

Jeżeli oś obrotu O'O' poprowadzimy przez punkt i, to ostatni związek możemy zapisać:

$$d\vec{r}_j = d\vec{r}_t + d\vec{\phi} \times \vec{r}\,'_j \,.$$

$$\frac{d\vec{r}_j}{dt} = \frac{d\vec{r}_t}{dt} + \frac{d\vec{\phi}}{dt} \times \vec{r}\,'_j \,, \qquad /5/$$

gdzie: $\frac{d\vec{r}_j}{dt} = \vec{V}_j$ - jest całkowitą prędkością liniową z jaką porusza się punkt j ,

$\frac{d\vec{r}_t}{dt} = \vec{V}_t$ - prędkość ruchu postępowego (translacyjnego),

$\vec{V}_r = \frac{d\vec{\phi}}{dt} \times \vec{r}\,'_j$ - prędkość ruchu rotacyjnego (obrotowego), przy czym

$\frac{d\vec{\phi}}{dt} = \vec{\omega}$ - jest prędkością kątową. Zatem

$$\vec{V}_j = \vec{V}_t + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'_j \quad . \qquad /6/$$

Energię kinetyczną bryły otrzymamy dzieląc całą bryłę na N elementów i sumując energie kinetyczne poszczególnych elementów

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j V_j^2 ,$$

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j V_j^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{N} m_j V_t^2 + 2\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{V}_t\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_j'\right) + \sum_{j=1}^{N} m_j\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_j'\right)^2\right) .$$

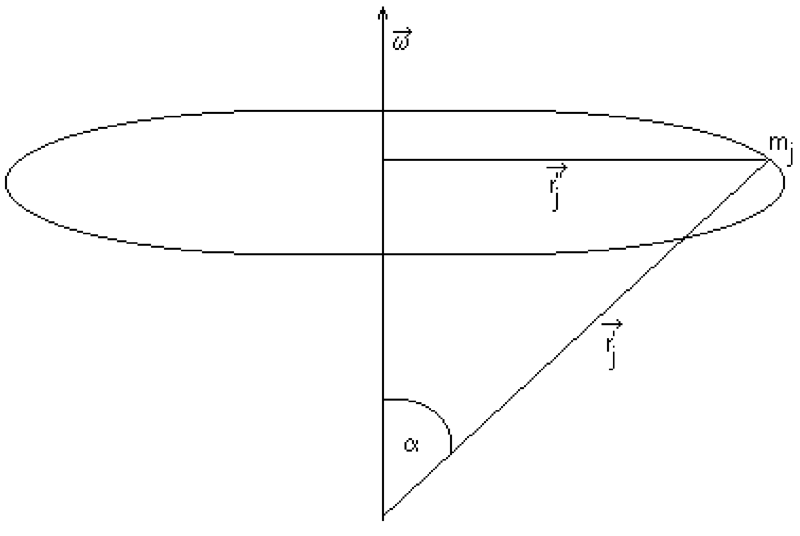
Po prostych przekształceniach

$$E_k = \frac{M\vec{V}_t^2}{2} + \vec{\omega}\times\sum_{j=1}^{N}\left(m_j\vec{r}_j'\right)\vec{V}_t + \frac{1}{2}\vec{\omega}^2\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{r}_j'^2 \sin^2\left(\vec{\omega}_j;\vec{r}_j'\right) . \qquad /7/.$$

Pierwszy wyraz w wyrażeniu /7/ jest enrgią kinetyczną ruchu postępowego bryły. Drugi wyraz zawiera energie mieszane, znika gdy początkiem układu jest środek masy bryły. Ostatni wyraz jest energią kinetyczną ruchu obrotowego.

$$E_{ko} = \frac{1}{2}\omega^2 J , \qquad /8/$$

gdzie: $J = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_j'^2 \sin^2\left(\vec{\omega}_j;\vec{r}_j'\right)$ - jest momentem bezwładności bryły.



Rys. 6.3.

Położenie punktu m_j względem osi obrotu ilustruje rysunek, łatwo zauważyć, że

$$r_j'' = r_j' \sin\alpha .$$

Zatem

$$J = \sum_{j=1}^{N} m_j r_j'^2 . \qquad /9/$$

W przypadku bryły ciągłej sumowanie po wszystkich elementach zastępujemy całkowaniem i moment bezwładności

$$J = \int r^2 dm . \qquad /10/$$

Znając gęstość ρ element masy dm obliczamy ze wzoru

$$dm = \rho \, \mathrm{d}V \ .$$

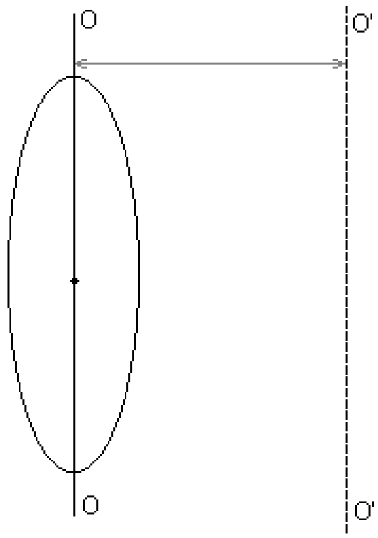
Wtedy

$$J = \int \rho r^2 dV \ . \qquad /11/$$

Moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy brył posiadających symetrię da się obliczyć z prostych zależności. Łatwo pokazać, że moment bezwładności względem określonej osi równoległej do osi przechodzącej przez środek masy wyznaczamy ze wzoru

$$J = J_0 + mb^2 \qquad /12/$$

znanego, jako twierdzenie Steinera.



Rys. 6.4.

Wzory /9/, /11/, /12/ zawierają sumy bądź całki. Ukryta w nich jest ważna własność momentu bezwładności - addytywność.

Podzielmy bryłę, jak to czyniliśmy poprzednio, na N elementów o masach m_j . Korzystając z drugiej zasady dynamiki, siłę $\vec{F}_j$ działającą na element masy m_j , przedstawiamy wyrażeniem

$$\vec{F}_j = m_j \frac{d\vec{V}_j}{dt} = \frac{d\vec{p}_j}{dt} \ , \qquad /13/$$

gdzie: $\vec{p}_j$ - jest pędem jaki posiada element masy m_j .

Pomnóżmy lewostronnie wektorowo wzór /13/ przez $\vec{r}_j$, wówczas

$$\vec{r}_j \times \vec{F}_j = \vec{r}_j \times \left(m_j \frac{d\vec{V}_j}{dt} \right) = \vec{r}_j \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \ ,$$

gdzie:

$$\vec{r}_j \times \vec{F}_j = \vec{M}_j \qquad /14/$$

- jest momentem siły działającym na element masy m_j .

Zatem

$$\vec{M}_j = \vec{r}_j \times \left(m_j \frac{d\vec{V}_j}{dt} \right) .$$

Podobne wyrażenie możemy zapisać dla każdego elementu bryły. Wykonując sumowanie po N elementach bryły otrzymujemy:

$$\vec{M} = \sum_{j=1}^{N} \vec{M}_j \ , \qquad /15/$$

gdzie: $\vec{M}$ - jest całkowitym momentem siły działającym na bryłę sztywną, a

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{M}_j = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \frac{d\vec{p}_j}{dt} \ .$$

Zauważmy, że $\dfrac{d\left(\vec{r}_j \times \vec{p}_j\right)}{dt} = \dfrac{d\vec{r}_j}{dt} \times \vec{p}_j + \vec{r}_j \times \dfrac{d\vec{p}_j}{dt}$,

przy czym $\dfrac{d\vec{r}_j}{dt} = \vec{V}_j$, a $\vec{p}_j = m_j \vec{V}_j$,

zatem $\dfrac{d\vec{r}_j}{dt} \times \vec{p}_j = \vec{V}_j \times m_j \vec{V}_j = 0$,

więc $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{r}_j \times \vec{p}_j\right) = \vec{r}_j \times \dfrac{d\vec{p}_j}{dt}$.

Suma $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \frac{d\vec{p}_j}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_j \times \vec{p}_j\right)$,

gdzie $\vec{r}_j \times \vec{p}_j = \vec{L}_j$ /16/

- jest momentem pędu jaki posiada element masy m_j .

Sumowanie i różniczkowanie funkcji ciągłych jest przemienne, zatem możemy zapisać

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_j \times \vec{p}_j\right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{p}_j = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{N} \vec{L}_j \ ,$$

a suma $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \vec{L}_j = \vec{L}$

- jest całkowitym momentem pędu bryły sztywnej.

Ostatecznie możemy zapisać

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} . \qquad /17/$$

Jest to jedna z matematycznych postaci II zasady dynamiki dla bryły sztywnej.

Zauważmy, że moment pędu

$$\vec{L} = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{p}_j = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times m_j \vec{V}_j \ .$$

Uwzględniając wyrażenie /6/ możemy zapisać

$$\vec{L} = \sum_{j=1}^{N} m_j \left[\vec{r}_j \times \left\{ \vec{V}_t + \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_j \right) \right\} \right] . \qquad /18/$$

Jeżeli bryła wykonuje tylko ruch obrotowy, wówczas $V_t = 0$ i wzór /18/ przybiera postać:

$$\vec{L} = \sum_{j=1}^{N} m_j \left[\vec{r}_j \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_j \right) \right] . \qquad /19/$$

Wykonując mnożenia w iloczynie wielokrotnym

$$\left[\left\{ \vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C} \right) \right\} = \vec{B} \cdot \left(\vec{A} \cdot \vec{C} \right) - \vec{C} \cdot \left(\vec{A} \cdot \vec{B} \right) \right]$$

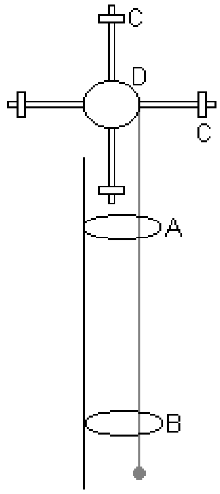
otrzymujemy

$$\vec{L} = \sum_{j=1}^{N} m_j \left[\vec{\omega} \cdot \vec{r}_j^{\,2} - \vec{r}_j \cdot \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_j \right) \right] ,$$

ale $\vec{\omega} \perp \vec{r}_j$, zatem $\vec{\omega} \cdot \vec{r}_j = 0$, więc

$$\vec{L} = \vec{\omega} \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_j^{\,2} = J\vec{\omega} . \qquad /20/$$

Opis urządzenia



Rys. 6.5.

Urządzenie składa się z wahadła Oberbecka oraz wyskalowanej listwy umocowanej pionowo z dwoma przesuwanymi wzdłuż listwy pierścieniami A i B. Wahadło Oberbecka składa się z walca D obracającego się na łożyskach w odpowiednim uchwycie oraz czterech symetrycznych ramion w kształcie prętów, wzdłuż których mogą przesuwać się ciężarki C.

Wahadło rozpędzane jest przy pomocy skalowanych obciążników zawieszonych na nici nawiniętej na walec osadzony na osi. Moment bezwładności wahadła zmieniamy przez przemieszczanie ciężarków C względem osi lub wykręcanie prętów z ciężarkami C.

Metoda pomiaru

A. Pomiar momentu bezwładności wahadła Oberbecka.

Zakładamy, że opór łożysk i ośrodka jest bardzo mały, zatem wahadło możemy traktować jako układ odizolowany, w którym stosuje się zasadę zachowania energii. Energia potencjalna zawieszonego obciążnika zamienia się w energię kinetyczną ruchu postępowego obciążnika i energię kinetyczną ruchu obrotowego krzyżaka .
Zasada zachowania energii dla całego układu przybierze postać:

$$mgh = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \;, \qquad /21/$$

gdzie: m - masa obciążników zawieszonych na nitce nawiniętej na walec wahadła,
h - różnica poziomów wyznaczona przez położenie pierścieni A i B między, którymi spada obciążnik o masie m,
V - prędkość obciążnika w chwili, gdy mija on pierścień B,
J - moment bezwładności wahadła Oberbecka,
ω -prędkość kątowa wahadła Oberbecka w chwili gdy obciążnik mija pierścień B.

Przyjmując, że spadanie obciążnika odbywa się ruchem jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej, prędkość obciążnika przy mijaniu pierścienia B obliczamy ze wzoru

$$V = \frac{2h}{t} \;,$$

gdzie: t - czas opadania między pierścieniem A i B.

Prędkość kątowa $\omega = \frac{V}{r}$,

gdzie: r - jest promieniem walca, na który nawinięto nić obciążoną masą m.
Po prostych przekształceniach wzoru /21/ otrzymujemy wyrażenie:

$$J = \frac{mr^2}{2h}\left(gt^2 - 2h\right). \qquad /22/$$

Moment bezwładności wahadła Oberbecka można również obliczyć mierząc masy poszczególnych elementów wahadła i uwzględniając ich wymiary.

$$J = J_w + 4\,J_p + J_m \;, \qquad /23/$$

gdzie:

$$J_w = \frac{1}{2} m_w r_1^2 \;, \qquad /24/$$

r_1 - promień zewnętrzny walca centralnego wahadła,
m_w - jego masa,

$$J_p = \frac{1}{3} m_p l^2, \qquad /25/$$

gdzie: m_p - masa pręta (ramienia krzyżaka),
l - jego długość,

$$J_m = \frac{1}{4} m_m \left(R_1 + R_2 \right)^2, \quad /26/$$

gdzie: m - sumaryczna masa obciążników,
R_1 i R_2 - odległość części zewnętrznej i wewnętrznej obciążnika od osi obrotu.

Wykorzystując wzory /24/, /25/, /26/ zapisujemy całkowity moment bezwładności

$$J = \frac{1}{2} m_w r_1^2 + \frac{1}{3} m_p l^2 + \frac{1}{4} m_m \left(R_1 + R_2 \right)^2. \qquad /27/$$

B. Sprawdzenie drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego.

Drugą zasadę dynamiki sformułujemy w postaci /17/ lub wzorem

$$M = J\xi, \qquad /28/$$

gdzie: ξ- jest przyspieszeniem kątowym.

Sprawdzenie drugiej zasady sprowadza się do znalezienia zależności M = f(ξ) przy ustalonym J. Moment siły obliczamy z zależności

$$M = \mathrm{Pr}, \qquad /29/$$

gdzie: P - jest ciężarem obciążnika zawieszanego na nitce nawiniętej na walec o promieniu r współosiowy z osią wahadła.

Przyspieszenie kątowe obliczamy ze wzoru

$$\xi = \frac{2h}{rt^2}, \qquad /30/$$

gdzie: t - jest czasem przelotu obciążnika między pierścieniami odległymi od siebie o h.

Wszystkie wartości z prawej strony we wzorach /29/ i /30/ są mierzone. Na ich podstawie łatwo uzyskać na drodze doświadczalnej związek między przyspieszeniem kątowym ξ a momentem siły M przy ustalonej wartości momentu bezwładności.

C. Badanie addywności momentu bezwładności.

Do zbadania addywności momentu bezwładności wykorzystujemy wahadło Oberbecka lub wahadło fizyczne. Różniczkowe równanie ruchu dla obrotów możemy zapisać w postaci

$$\vec{M} = J\frac{d^2\vec{\alpha}}{dt^2}. \qquad /31/$$

Ponieważ ruch wahadła Oberbecka we współrzędnych biegunowych można traktować jednowymiarowo więc ostatnie równanie da się zapisać jako

$$M = J\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \qquad /32/$$

lub

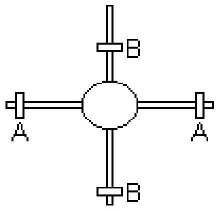
$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{m_2 gd\sin\alpha}{J} = 0, \quad /33/$$

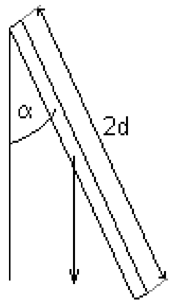
przy czym $M = -m_2 gd\sin\alpha$,

gdzie: m - masa wahadła Oberbecka (patrz rysunek niżej),

d - odległość środka masy od osi obrotu,

α - kąt wychylenia z położenia równowagi.





Rys. 6.6.

Dla małych kątów wychylenia możemy przyjąć, że $\sin\alpha \approx \alpha$,wówczas równanie /33/ przybierze postać

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{m_2 gd}{J}\alpha = 0. \qquad /34/$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego prostego. Z drugiej strony możemy równanie osylatora harmonicznego zapisać jako

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0, \qquad /35/$$

gdzie: $\omega = \frac{2\pi}{T}$, przy czym T jest okresem drgań.

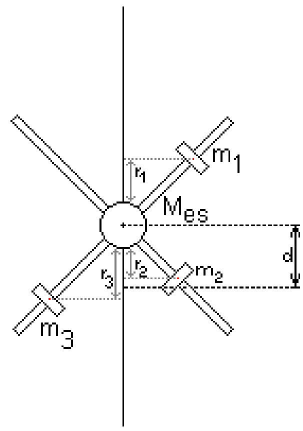
Ponieważ wzory /34/ i /35/ opisują ten sam oscylator współczynniki przy α winny być równe, zatem

$$\frac{m_2 gd}{J} = \omega^2,$$

stąd

$$J = \frac{m_2 gdT^2}{2\pi}. \qquad /36/$$

Wielkości m_2, d, T prawej strony wzoru /36/ możemy wyznaczyć eksperymentalnie. Największe problemy może stworzyć wyznaczenie odległości (d) środka masy od osi obrotu. Łatwo zauważyć, że środek masy elementów (o masie M_{es}) rozłożonych symetrycznie względem osi obrotu znajduje się w punkcie leżącym na osi. Masy rozłożone niesymetrycznie względem osi obrotu można sprowadzić do mas rozłożonych wzdłuż odcinka prostoliniowego przechodzącego przez oś obrotu i leżącego w linii pionu.



Rys. 6.7.

W ogólności odległość środka masy od osi obrotu obliczamy ze wzoru

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i r_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} . \qquad /37/$$

A w przypadku zilustrowanym rysunkiem 6.7

$$d = \frac{M_{es} r_0 + m_2 r_2 + m_3 r_3 - m_1 r_1}{M_{es} + m_1 + m_2 + m_3} ,$$

ponieważ $r_0 = 0$, to ostatecznie

$$d = \frac{m_2 r_2 + m_3 r_3 - m_1 r_1}{m_1 + m_2 + m_3} .$$

Aby obliczyć odległość środka masy od osi obrotu wystarczy zmierzyć długości rzutów odległości środków masy elementów położonych niesymetrycznie względem osi obrotu na kierunek pionowy oraz masy tych elementów.

Przebieg pomiarów

***A**. Pomiar momentu bezwładności wahadła Oberbecka.*

1. Ustawiamy elementy C w odległości maksymalnej od osi obrotu.
2. Pierścienie A i B ustawiamy w odległości h od siebie.
3. Nawijamy nitkę na walec D i obciążamy obciążnikiem o masie m, tak aby dolna krawędź obciążnika znalazła się na wysokości górnej krawędzi pierścienia A.
4. Mierzymy czas t spadania obciążnika między pierścieniami A i B.
5. Pomiary powtarzamy pięciokrotnie dla tego samego obciążnika i tego samego ustawienia elementów C.
6. Pomiary przeprowadzamy dla innych obciążników i tego samego ustawienia elementów C.
7. Pomiary powtarzamy dla innych położeń elementów C.

Uwaga: Zwrócić szczególną uwagę na staranne rozmieszczenie elementów C starając się uzyskać ich układ symetryczny względem osi obrotu.

8. Obliczamy moment bezwładności ze wzoru /22/ oddzielnie dla każdej serii pomiarów.
9. Obliczamy moment bezwładności ze wzoru /27/ (wykonać przedtem niezbędne pomiary) dla różnych ustawień elementów C.
10. Wykonujemy rachunek błędów oraz przeprowadzamy dyskusję wyników i popełnionych błędów.

***B**. Sprawdzenie drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego.*

1. Przygotowujemy urządzenie do wykonania pomiarów jak w części A.
2. Jeżeli wykonujemy tylko część B ćwiczenia należy dokonać pomiaru momentu bezwładności dla wybranego ustawienia elementów C jak w części A.
3. Mierzymy wartość wielkości ustalonych jak: ramię obrotu r siły ciężkości P, odległość h między pierścieniami A i B.
4. Mierzymy czas przelotu obciążnika między pierścieniami A i B jak w punktach 3 i 4 cz. A.
5. Obliczamy moment siły M ze wzoru /29/ i przyspieszenie kątowe ze wzoru /30/.
6. Pomiary i obliczenia opisane w punktach 4 i 5 powtarzamy dla obciążników o masie dwukrotnie, trzykrotnie większej, itp.
7. Obliczamy moment siły korzystając ze wzoru /28/.
8. Pomiary i obliczenia powtarzamy dla innych momentów bezwładności.
9. Przeprowadzamy rachunek błędów.
10. Sporządzamy wykres zależności $\xi = f(M)$.
11. Przeprowadzamy dyskusję wyników i wyciągamy wnioski.

***C**. Badanie addywności momentu bezwwładności.*

1. Rozsymetryzowujemy wahadło Oberbecka pozostawiając element C na jednym ramieniu krzyżaka (np. w odległości maksymalnej od osi obrotu).
2. Wyznaczamy odległość d środka masy wahadła od osi obrotu (patrz wzór /37/).
3. Mierzymy czas (t) n = 50 wahnień wahadła i obliczamy jego okres T =t/n.
4. Przesuwamy element C do połowy ramienia krzyżaka i powtarzamy pomiary jak w punkcie 2 i 3.
5. Dokładamy taki sam element C na końcu ramienia krzyżaka i wykonujemy pomiary jak w punkcie 2 i 3.
6. Wykonujemy pomiary dla pięciu innych kombinacji położeń elementów C na ramionach krzyżaka wskazanych przez asystenta.
7. Obliczamy moment bezwładności ze wzoru /36/ i przeprowadzamy rachunek błędów.
8. Sprawdzamy prawo sumowania momentów bezwładności i wyciągamy wnioski.