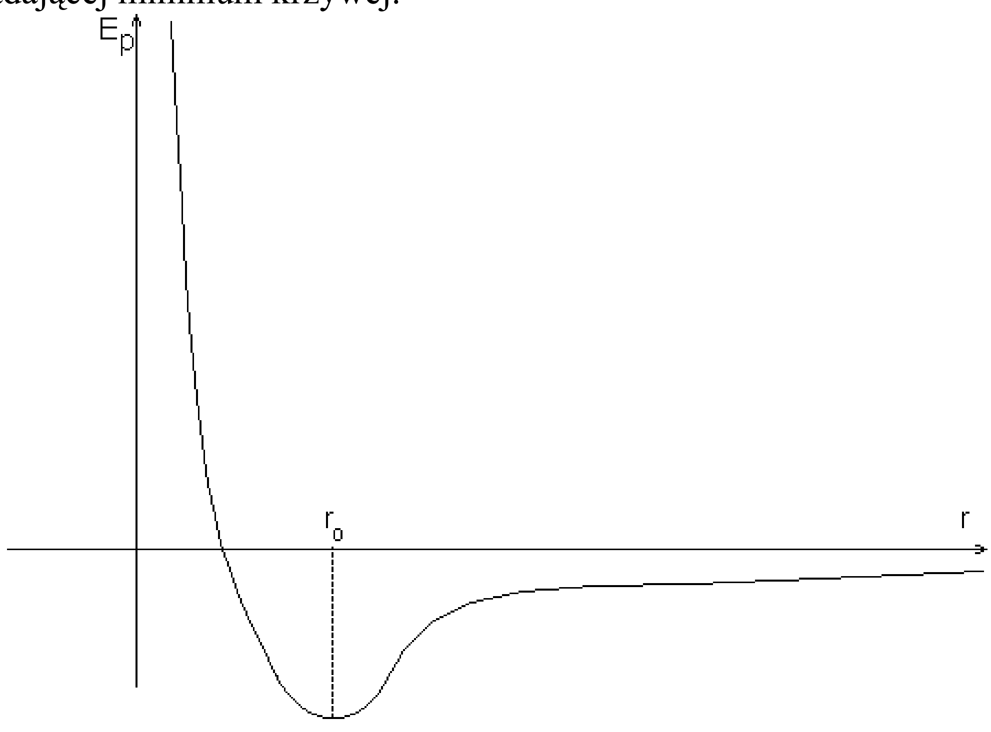
ĆWICZENIE 5

# SPRAWDZENIE PRAWA HOOKE'A, WYZNACZANIE MODUŁU YOUNGA, WSPÓŁCZYNNIKA POISSONA, MODUŁU SZTYWNOŚCI I ŚCIŚLIWOŚCI DLA MIKROGUMY.

## Wprowadzenie

Odkształcenie, którego doznaje ciało pod działaniem sił nazywa się doskonale sprężystym jeżeli, ciało po ustaniu ich działania wraca do swego stanu poprzedniego. Po przekroczeniu granicy sprężystości ustanie działania siły zewnętrznej nie powoduje powrotu do pierwotnego kształtu - powstaje tzw. odkształcenie resztkowe. Odkształcenie albo deformacja wiąże się ze zmianą położenia cząsteczek ciała, a co za tym idzie ze zmianą położenia równowagi. W wyniku aktualnego stanu oddziaływań międzycząsteczkowych pojawia się siła sprężystości i związana z nią energia potencjalna. Na rysunku poniżej przedstawiono zależność energii cząsteczek w ciele stałym od wzajemnej odległości między nimi. W warunkach równowagi cząsteczka ciała stałego posiada energię minimalną, a zatem musi się znajdować w odległości $r_0$ - odpowiadającej minimum krzywej.




Rys. 5.1.

Podczas rozciągania odległości między cząsteczkami zwiększają się, a energia cząsteczki rośnie, podobnie podczas jego ściskania odległości między cząsteczkami maleją, a energia również rośnie. Wywołuje to stany nierównowagi, o których mówiliśmy wyżej. Przy rozciąganiu pojawiają się siły zmuszające do zmniejszania odległości międzycząsteczkowych a więc przyciągania, a przy ściskaniu siły zmuszające do zwiększania odległości międzycząsteczkowych, czyli siły odpychające. Siły te równoważą siły zewnętrzne działające na ciało.

Miarą naprężenia jest wektor o wartości równej stosunkowi wartości siły do powierzchni, na którą działa, o kierunku i zwrocie zgodnym z kierunkiem i zwrotem wektora siły, co możemy wyrazić wzorem:

$$\vec{p} = \frac{\vec{F}}{S}, \qquad /1/$$

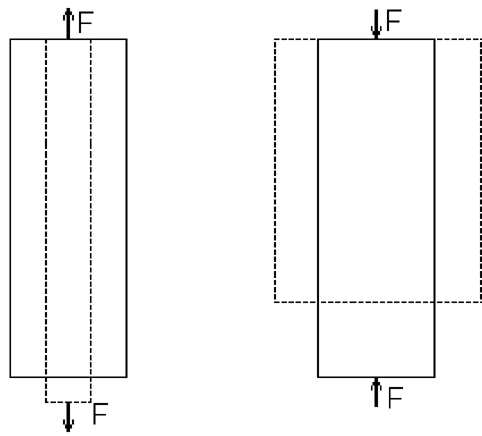
gdzie: $\vec{p}$ - wektor naprężenia,

$\vec{F}$ - wektor siły zewnętrznej,

$S$ - powierzchnia prostopadła do F .

Naprężenie można rozłożyć na składowe: styczną i normalną. Naprężenie normalne nazywane ciśnieniem powoduje na ogół odkształcenie objętości, natomiast odkształcenie styczne - odkształcenie postaci.

Jeżeli w wyniku działających sił zewnętrznych następuje zmiana jednego wymiaru ciała, to mamy do czynienia z odkształceniem jednostronnym. Przy rozciąganiu ciało zmienia swoją długość o $\Delta l > 0$, a przy ściskaniu o $\Delta l < 0$. Odpowiednio wydłużenie względne przy rozciąganiu $\Delta l/l > 0$, a przy ściskaniu $\Delta l/l < 0$. Odkształcenie jednostronne jest przypadkiem wyidealizowanym bowiem pod działaniem sił następuje przemieszczanie przestrzenne cząsteczek, co wiąże się ze zmianą objętości. Zatem rzeczywistym odkształceniem jest odkształcenie, w którym następuje zmiana objętości $\Delta V$. Przy rozciąganiu następuje wydłużenie ciała w kierunku działania sił, a skrócenie wymiarów poprzecznych a przy ściskaniu, skrócenie wymiarów podłużnych i wydłużenie wymiarów poprzecznych (patrz rys. 5.2.).




Rys. 5.2.

Dla małych odkształceń mieszczących się w granicach proporcjonalności możemy sformułować prawo Hooke'a w następującej postaci:

***"Jeżeli działające na ciało naprężenia zewnętrzne są dostatecznie małe, to wywołane przez nie odkształcenia są do nich wprost proporcjonalne."***

$$\Delta l / l \sim p \,, \qquad /2'/$$

lub w postaci równania

$$\Delta l / l = k\, p, \qquad /2/$$

gdzie: $k$ - jest współczynnikiem proporcjonalności.
Prawo to ma różną postać dla różnych typów odkształceń i tak dla jednostronnego rozciągania (lub ściskania)

$$\Delta l / l = p / E, \qquad /3/$$

gdzie: E - jest modułem Younga; dla wszechstronnego ściskania lub rozciągania

$$-\frac{\Delta V}{V} = \frac{p}{K} \,, \qquad /4/$$

gdzie: $V$ - początkowa objętość ciała,
$\Delta V$ - zmiany objętości (przy ściskaniu ujemne, przy rozciąganiu dodatnie),
$K$ - moduł ściśliwości;
dla ścinania

$$\alpha = \frac{p_s}{G} \,, \qquad /5/$$

gdzie: $\alpha$ - kąt skręcenia (ścinania),
$G$ - moduł sztywności,
$p_s$ - naprężenie styczne.
Stałe $E$, $k$ i $G$ występujące we wzorach 3, 4, 5, są charakterystyczne dla danego

ciała.

Jak wcześniej zauważyliśmy ściskanie lub rozciąganie jednokierunkowe wywołuje równocześnie odkształcenia objętościowe i postaci, z którymi związane są wyboczenia. W obszarze odkształceń sprężystych prawdziwe jest stwierdzenie (znane czasem jako prawo Poissona):

*" Wyboczenie względne jest proporcjonalne do wydłużenia (skrócenia) względnego",*

co możemy zapisać

$$\frac{\Delta a}{a} \sim \frac{\Delta l}{l},$$

lub w postaci równania

$$\frac{\Delta a}{a} = \mu \frac{\Delta l}{l}, \qquad /6/$$

gdzie: $\mu$ - jest współczynnikiem Poissona - jest to wielkość charakterystyczna dla danego materiału, z którego zbudowane jest ciało. Ze wzoru 6 otrzymamy współczynnik Poissona

$$\frac{\frac{\Delta a}{a}}{\frac{\Delta l}{l}} = \mu \ . \qquad /7/$$

Znajdźmy związek między współczynnikiem Poissona, modułem Younga i modułem ściśliwości. Weźmy pod uwagę kostkę sześcienną o krawędzi $l$ i objętości $V=l^3$ , ściśnijmy ją wzdłuż jednej krawędzi. Krawędź ta ulegnie skróceniu o $\Delta l$, zatem nowa długość $l' = l - \Delta l$.

Łatwo zauważyć, że

$$\frac{l'}{l} = 1 - \frac{\Delta l}{l}. \qquad /8/$$

Boczne krawędzie wydłużyły się zgodnie ze wzorem 6 o $\Delta l'' = \mu\, \Delta l$,

zatem

$$l'' = l + \Delta l'' = l + \mu\, \Delta l \ ,$$

a stosunek długości końcowej do początkowej

$$\frac{l''}{l} = 1 + \mu \frac{\Delta l}{l}. \qquad /9/$$

Nowa objętość kostki

$$V' = l'\, l''^2 \ ,$$

lub uwzględniając wzory 8 i 9

$$V' = l^3\left(1-\frac{\Delta l}{l}\right)\left(1+\mu\frac{\Delta l}{l}\right)^2 .$$

Po wykonaniu mnożenia i odrzuceniu wyrazów nieliniowych względem *Δl/l*

$$V' \cong V\left(1-\frac{\Delta l}{l}+2\mu\frac{\Delta l}{l}\right),$$

stąd

$$\frac{V'-V}{V} \cong -\frac{\Delta l}{l}+2\mu\frac{\Delta l}{l} \ ,$$

lub

$$-\frac{\Delta V}{V} \cong \frac{\Delta l}{l}\left(1-2\mu\right). \qquad /10/$$

Biorąc pod uwagę wzór 3 i 4 ostatni związek przekształcimy we wzór

$$\frac{1}{K}=\frac{1}{E}\left(1-2\mu\right) \ ,$$

lub

$$K=\frac{E}{1-2\mu}. \qquad /11/$$

Wzór ten wskazuje na związek między modułem ściśliwości, modułem Younga i współczynnikiem Poissona. Jeżeli kostkę poddamy izotropowemu ściskaniu, to każda z jej krawędzi ulegnie skróceniu o $\Delta l$.

Zatem

$$l' = l - \Delta l = l\left(l-\frac{\Delta l}{l}\right).$$

Korzystając z prawa Hooke'a /3/

$$l' = l\left(l-\frac{1}{E}p\right).$$

Skutkiem działania ciśnienia w kierunku poprzecznym każda z krawędzi ulega poissonowskiemu wydłużeniu o $\Delta l'$ .Zatem krawędzie poprzeczne

$$l'' = l + \Delta l' = l\left(l+\frac{\Delta l'}{l}\right).$$

Ze wzoru 6 i 3

$$l'' = l\left(1+\mu\frac{\Delta l}{l}\right) = l\left(1+\frac{\mu}{E}p\right).$$

Wydłużenie poissonowskie w stosunku do długości pierwotnej wynosi

$$1+\frac{\mu}{E}p .$$

Krawędź kostki zmniejsza swoją długość w wyniku ściskania, zgodnie z prawem Hooke'a i wydłuża się zgodnie z prawem Poissona. Nowa długość krawędzi wyraża się wzorem:

$$l''' = l\left(l - \frac{p}{E}\right)\left(1 + \frac{\mu}{E}p\right)^2,$$

gdzie każde z dwu poprzecznych składowych ciśnienia wywołuje wydłużenia w takim samym stosunku

$$\left(\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta l}{l}\right).$$

Nowa objętość

$$V' = l'''^3 = l^3\left(1 - \frac{p}{E}\right)^3\left(1 + \frac{\mu}{E}p\right)^6.$$

Po wykonaniu mnożenia i odrzuceniu wyrazów nieliniowych względem *1/E* otrzymujemy:

$$V' \cong V\left[1 - \frac{3}{E}(1 - 2\mu)p\right].$$

Związek między modułem ściśliwości, współczynnikiem Poissona oraz modułem Younga otrzymujemy w postaci:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}. \qquad /12/$$

Związek między modułem sztywności, modułem Younga i współczynnikiem Poissona wskazuje wzór

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \qquad /13/$$

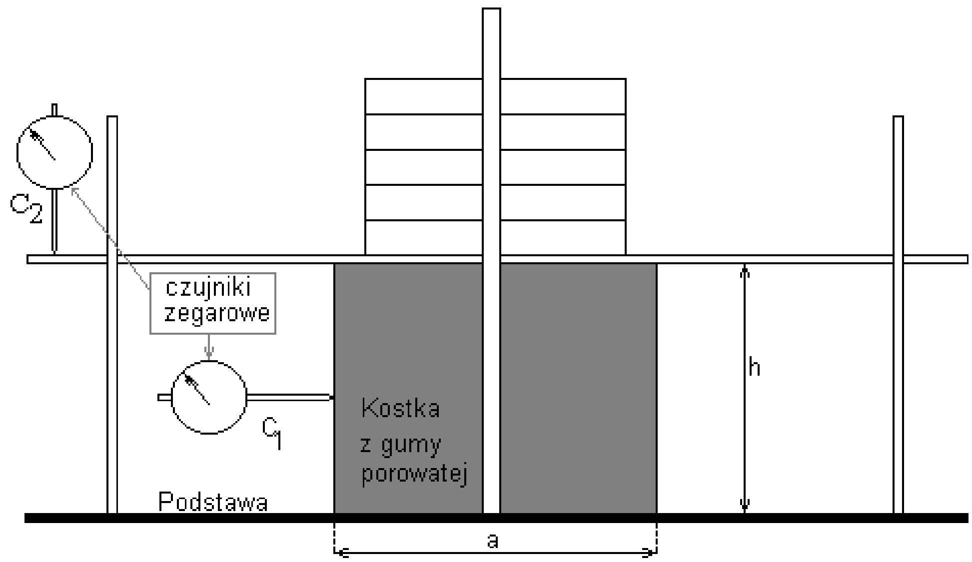
którego wyprowadzać nie będziemy. Z ostatnich dwóch wzorów wynika

$$E = \frac{9KG}{G + 3K}. \qquad /14/$$

Znajomość modułów sztywności, ściśliwości, Younga i współczynnika Poissona jest ważna w technice.

## Opis przyrządów

Pomiary wykonujemy na kostce mikrogumy o wymiarach *a* x b x *h* z otworem w środku, przy pomocy urządzenia składającego się z podstawy, w którą wkręcono 5 prętów; cztery narożne, to prowadnice płytki, piąty umocowany centralnie, to prowadnica obciążników. Gumową kostkę oraz przykrywającą ją płytkę umieszczamy w prowadnicach. Czujniki zegarowe mocujemy; jeden ($C_1$) na ściance bocznej, a drugi ($C_2$) - (wciśnięty) na płytce przykrywającej kostkę. Schemat urządzenia przedstawia rysunek poniżej.




Rys. 5.3.

## Metoda pomiarów

Moduł Younga wyznaczamy korzystając ze wzoru /3/, który dla naszego przypadku zapiszemy w postaci

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{p}{E} \ ,$$

gdzie: $p$ - ciśnienie wywierane na kostkę z mikrogumy,
$\Delta h$ - zmiana wysokości kostki,
$h$ - wysokość początkowa kostki,
$E$ - moduł Younga.

Ponieważ

$$p = \frac{F}{S} \text{, to } F = ES\frac{\Delta h}{h} \text{, oraz } F = mg \ ,$$

gdzie: $F$ - siła ściskająca,
$S$ - pole powierzchni kostki / S = a b /,
$m$ - masa obciążników,
$g$ - przyspieszenie ziemskie.

Tutaj siłą ściskającą jest siła grawitacji działająca na obciążniki układane na pokrywie urządzenia pomiarowego. Dla danej kostki parametry E, $h$, a w pewnym przybliżeniu i $S$ są stałe, zatem $\Delta h \sim m$, lub

$$\Delta h = k\, m\ , \qquad /15/$$

gdzie:

$$k = \frac{gh}{Eab}\ .$$

Łatwo zauważyć, że współczynnik proporcjonalności $k$ liczbowo jest równy tangensowi kąta nachylenia prostej w układzie ($\Delta h$, $m$ ) $z$ dodatnim kierunkiem osi m $k \overset{liczb}{=\!=} tg\alpha$ .

Zatem

$$E = \frac{gh}{ab} ctg\alpha . \qquad /16'/$$

Ctg α mierzymy bezpośrednio z wykresu. Moduł Younga obliczymy również z zależności

$$E = \frac{Fh}{S\Delta h} = \frac{mgh}{ab\Delta h} . \qquad /16/$$

W rzeczywistości w wyniku nacisku następuje zmiana wymiarów poprzecznych - pojawiają się wyboczenia. Są dodatnie z uwagi na ściskanie. Wyboczenia względne na kierunku prostopadłym są sobie równe

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}\ . \qquad /17/$$

Korzystając z prawa Poissona możemy zapisać

$$\frac{\Delta a}{a} = \mu \frac{\Delta h}{h}\ ,$$

gdzie współczynnik $\mu$ - jest współczynnikiem Poissona.

Stąd

$$\mu = \frac{\frac{\Delta a}{a}}{\frac{\Delta h}{h}}\ . \qquad /18/$$

## Przebieg pomiarów

1. Wyjmujemy z urządzenia kostkę gumową i przy pomocy suwmiarki wykonujemy po 10 pomiarów każdej krawędzi. Obliczamy średnią dla każdego pomiaru.
2. Montujemy układ jak na rysunku 5.3.
3. Sprawdzamy prawo Hooke'a na ściskanie { zbadamy zależność $\Delta h/ h = f ( m )$, gdzie: m - masa obciążników ściskających kostkę} .
   a. Wykonujemy pomiary zwiększając obciążenie od 0 do 20 obciążników.
   b. Wykonujemy pomiary zmniejszając liczbę obciążników od 20 do 0 obciążników.
   c. Pomiary z punktów 3a i 3b powtarzamy 3-krotnie.
   d. Znajdujemy średnie zgniecenie kostki dla każdego obciążnika z 6-ciu serii pomiarów.
   e. Sporządzamy wykres odkładając na osi rzędnych średnie wydłużenie, a na osi odciętych masę obciążników.
   f. Z wykresu odczytujemy ctg $\alpha$ i korzystając ze wzoru /16'/ obliczamy moduł Younga.
4. Obliczamy moduł Younga ze wzoru /16/ dla 10 wybranych pomiarów. Obliczamy średnią wartość $E$ i wynik porównujemy z wartością otrzymaną w punkcie 3f.
5. Obliczamy moduł Younga dla jednego punktu leżącego najdokładniej na prostej części wykresu posługując się wzorem /16/. Porównujemy z wynikiem z punktu 3f i średnim wynikiem z punktu 4.
6. Wyboczenie mierzymy sześciokrotnie dla 3 różnych obciążeń ( np.: 10, 15 i 20 obciążników ). Do obliczeń bierzemy średnie wyniki pomiarów dla każdego obciążenia. Obliczamy wyboczenie średnie.
7. Obliczamy współczynnik Poissona dla trzech obciążeń ( pkt. 6.) korzystając ze wzoru /18/. Obliczamy moduł ściśliwości ze wzoru /11/ i /12/ korzystając ze średniego modułu Younga oraz współczynnika Poissona. Porównujemy wyniki.
8. Obliczamy moduł sztywności korzystając ze wzoru /13/ i /14/. Do obliczeń bierzemy średnie wartości modułu Younga i współczynnika Poissona.
9. Błąd pomiaru krawędzi obliczamy jako błąd średni kwadratowy. Błędy pozostałych wartości liczymy jako błędy maksymalne. Błędy $\Delta E$, $\Delta K$ i $\Delta g$ oraz $\Delta \mu$ obliczamy metodą różniczki zupełnej.
10. Przeprowadzamy dyskusję błędów.
11. Przeprowadzamy dyskusję wyników i wyciągamy wnioski.