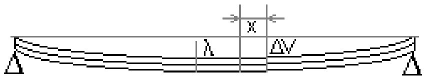
ĆWICZENIE 4

WYZNACZANIE MODUŁU YOUNGA PRZEZ ZGINANIE

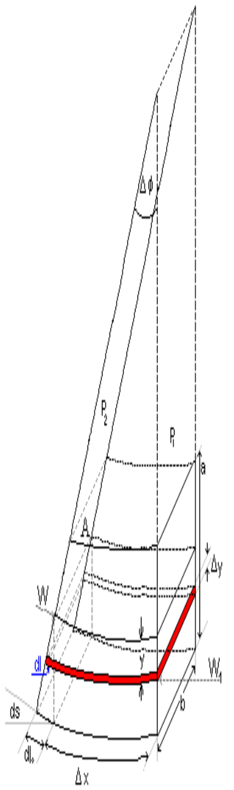
Wprowadzenie

Pręt umocowany na końcach pod wpływem własnego ciężaru lub pod obciążeniem ulega wygięciu.



Rys. 4.1.

W górnej warstwie pręta następuje ściśnięcie, a w dolnej rozciągnięcie materiału pręta. Cienka warstwa środkowa nie ulega ani ściskaniu ani rozciąganiu i tworzy warstwę "neutralną". Przy dostatecznie małym obciążeniu wydłużenia dolnej warstwy i ściśnięcia górnej podlegają prawu Hooke'a. Załóżmy, że pręt nie obciążony nie ulega ugięciu.



Rys. 4.2.

Strzałka ugięcia λ powstaje pod wpływem obciążenia zewnętrznego. Weźmy pod uwagę element ΔV pręta odległy o x od jego środka. Przed obciążeniem powierzchnie przekroju pręta wycinające element ΔV są równoległe, po obciążeniu i ugięciu pręta tworzą kąt $\Delta\varphi$. Przez punkt A należący do płaszczyzny przekroju P_2 i warstwy neutralnej W prowadzimy powierzchnię równoległą do powierzchni przekroju P_1 . Odległość między tymi płaszczyznami wynosi Δx.

W wyniku ugięcia warstwa W_1 odległa o y od warstwy neutralnej W ulega wydłużeniu o $\Delta\varphi$ y.

Weźmy pod uwagę element pręta o wymiarach

$$\Delta V' = \Delta x \ \Delta y \ b$$

odległy o y od warstwy neutralnej W.

Przekrój jego powierzchni prostopadłej do długości pręta wynosi b Δy.

Prawo Hooke'a: F = - k x można zapisać w równoważnej postaci

$$p = E\frac{\Delta l}{l} \qquad /1/$$

gdzie: p - naprężenie,

$\Delta l / l$ - wydłużenie względne,

E - moduł Younga.

Naprężenie $$p = F/S\,, \qquad /2/$$

gdzie: F - siła działająca prostopadle do powierzchni S.

Ze wzorów /1/ i /2/ łatwo otrzymać związek

$$F = ES\frac{\Delta l}{l}.$$

Siła ta powoduje odkształcenie pręta. W naszym przypadku powierzchnia elementu ΔV', na który działa siła odkształcająca ΔF

$$\Delta S = b\Delta y\ ,$$

wydłużenie względne

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{y\Delta\varphi}{\Delta x}.$$

Zatem siła odkształcająca

$$\Delta F = Eby\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\Delta y. \qquad /3/$$

Moment siły /3/ względem warstwy W wynosi

$$\Delta M = \Delta F y = Eby^2\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\Delta y. \qquad /4/$$

Całkowity moment siły otrzymujemy zastępując przyrosty skończone we wzorze /4/ przyrostami nieskończenie małymi i całkując po całej grubości pręta (- a/2 ; a/2).

$$dM = Eby^2\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}dy. \qquad /5/$$

A po scałkowaniu

$$M = E\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}b\int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy. \qquad /5'/$$

Oznaczmy

$$J = b\int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy\,. \qquad /6/$$

wówczas /5'/przybierze postać

$$M = EJ\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\,. \qquad /7/$$

Siła F powodująca zginanie pręta zaczepiona jest w jego środku. Zgodnie z zasadami rozkładania sił działających na ciało sztywne można ją zastąpić dwiema siłami o wartości F/2 przyczepionymi do końców pręta działających zginająco ku górze, wówczas punkt końca strzałki ugięcia można traktować jako minimalny.

Moment siły odpowiedzialny za odkształcenie pręta pochodzi od siły zewnętrznej. Dla dowolnej odległości x od środka pręta otrzymujemy

$$M = \frac{F}{2}x\,. \qquad /8/$$

Z warunku równowagi wynika, że oba momenty opisane wzorami /7/ i /8/ są sobie równe

$$\frac{F}{2}x = EJ\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\,.$$

Łatwo zauważyć, że stosunek elementu strzałki ugięcia $\Delta\lambda$ od odległości od środka x $\Delta\lambda/x = \Delta\varphi$.

Zatem

$$\frac{F}{2}x^2 = EJ\frac{\Delta\lambda}{\Delta x}\,,$$

stąd

$$\Delta\lambda = \frac{1}{2}\frac{F}{EJ}x^2\Delta x\,.$$

Przechodząc do nieskończenie małych i całkując w przedziale od 0 do $l/2$

gdzie: l - jest odległością między podporami (zakładamy, że $l \approx$długość pręta),

otrzymujemy całkowitą strzałkę ugięcia

$$\lambda = \frac{1}{2}\frac{F}{EJ}\int_0^{l/2} x^2 dx\,.$$

Po wykonaniu rachunków

$$\lambda = \frac{1}{48}\frac{F}{EJ}l^3\,. \qquad /9/$$

Dla przekroju prostokątnego

$$J = b\int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy\,,$$

gdzie: a - grubość pręta (w kierunku strzałki ugięcia).

Zatem

$$J = \frac{1}{12} b a^3 \,. \qquad /10/$$

Podstawiając /10/ do /9/ otrzymujemy

$$\lambda = \frac{1}{4} \frac{F}{E b a^3} l^3 \,. \qquad /11/$$

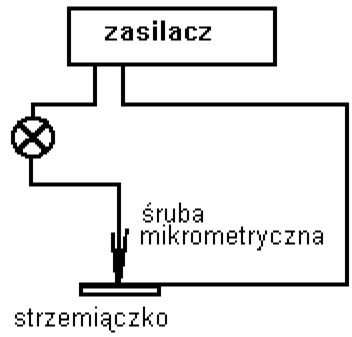
Stąd ostatecznie

$$E = \frac{1}{4} \frac{F l^3}{\lambda b a^3} \,. \qquad /12/$$

Opis urządzenia

Urządzenie do wykonania pomiaru modułu Younga metodą ugięcia składa się z dwóch podpór przymocowanych do stołu oraz prętów wymiennych wykonanych z różnych materiałów o różnych przekrojach prostokątnych. W środku między punktami podparcia zawieszamy szalkę na strzemiączku. Szalkę obciążamy odważnikami. Strzałkę ugięcia mierzymy przy pomocy odpowiedniej śruby mikrometrycznej, której ostrze stykamy z górną częścią strzemiączka. Celem ustalenia precyzyjnego styku ostrza śruby mikrometrycznej ze strzemiączkiem włączamy strzemiączko i śrubę do obwodu prądu elektrycznego zawierającego żarówkę. Przyjmujemy, że moment zaświecenia żarówki odpowiada zetknięciu śruby ze strzemiączkiem.

Przebieg pomiarów



Rys. 4.3.

1. Zestawić układ wg. przedstawionego opisu urządzenia i zmontować obwód elektryczny wg. rys. 4.3.
2. Wykonać wielokrotne pomiary odstępów między środkami podpór l, szerokości b oraz grubości a w różnych miejscach pręta.
3. Obciążać pręt od 0 do 500 g obciążnikami co 50g i dokonać pomiaru strzałki ugięcia (uwzględniając masę szalki i strzemiączka).
4. Pomiary z punktu 3 powtórzyć zmniejszając obciążenie.
5. Sporządzić wykres $\lambda = f(m)$, m - masa szalki, strzemiączka i obciążników.
6. Pomiary z punktów 2, 3, 4 powtórzyć używając innych prętów.
7. Obliczyć, korzystając ze wzoru /12/, moduł Younga dla różnych materiałów.

8. Błąd maksymalny obliczyć metodą pochodnej logarytmicznej.

$$\Delta E = E\left(\frac{\Delta F}{F} + \frac{3\Delta l}{l} + \frac{\Delta \lambda}{\lambda} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{3\Delta a}{a}\right).$$

Błąd pomiaru F i λ oszacować na podstawie użytych przyrządów jako błąd maksymalny, wielkości błędu l, a, b oszacować jako błąd maksymalny średni kwadratowy. Przeprowadzić dyskusję błędów.

9. Wyciągnąć wnioski. Porównać otrzymane wartości E dla badanych materiałów z wartościami tablicowymi.