ĆWICZENIE 3.

WAHADŁO SPRĘŻYNOWE. POMIAR POLA ELIPSY ENERGII.

Wprowadzenie

1. Oscylator harmoniczny.

Oscylatorem harmonicznym nazywamy punkt materialny, na który,działa siła skierowana do pewnego centrum, proporcjonalna do odległości tego punktu od centrum. Oznaczając tę siłę przez F możemy zapisać:

$$F \sim x,$$

lub w postaci równości

$$F = -kx, \qquad (1)$$

gdzie: k - jest współczynnikim proporcjonalności.
Jeżeli punkt poddawany jest tylko działaniu siły danej wzorem (1), wówczas mamy do czynienia z jednowymiarowym oscylatorem harmonicznym bez tłumienia. W rzeczywistości trudno usunąć siły oporu ośrodka i tarcia. Każdy rzeczywisty oscylator harmoniczny jest oscylatorem tłumionym, którego ruch wywołany jest przez siłę

$$F = -kx + F_0 + F_t,$$

gdzie: F_0 - siły oporu ośrodka, F_t - siły oporu tarcia.
Zakładając, że $F_0 = 0$ i $F_t = 0$ różniczkowe równanie ruchu jednowymiarowego oscylatora harmonicznego zapiszemy w postaci:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

lub

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Wprowadźmy oznaczenie $\omega^2 = \frac{k}{m}$, gdzie: ω - nazywać będziemy częstością kołową lub pulsacją. Zatem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \qquad (2)$$

Ostatnie równanie często nazywamy różniczkowym równaniem oscylatora harmonicznego. Ogólnym rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$x = A_1 \sin\omega t + A_2 \cos\omega t, \qquad (3)$$

gdzie: A_1 i A_2 są dowolnymi stałymi. Wyznaczamy je z warunków początkowych. W tym celu założymy, że w chwili $t = 0$ punkt znajdował się w położeniu

$$x = x_0$$

i poruszał się z prędkością

$$V = V_0 .$$

Różniczkując (3) względem czasu dostajemy

$$V = \frac{dx}{dt} = A_1 \omega \cos \omega t - A_2 \omega \sin \omega t. \qquad (4)$$

Nakładając warunki początkowe w wyrażeniu (3) i (4) otrzymujemy układ równań agebraicznych:

$$x_0 = A_2$$

$$V_0 = A_1 \omega.$$

Stąd łatwo obliczyć stałe A_1 i A_2. Po podstawieniu do wzoru (3) i (4) otrzymujemy odpowiednio:

$$\begin{aligned} x &= \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t, \\ V &= V_0 \cos \omega t - x_0 \omega \sin \omega t. \end{aligned} \qquad (5)$$

Wprowadźmy stałe A i ϕ określone równaniami:

$$\begin{aligned} A \sin \phi &= x_0 , \\ A \cos \phi &= \frac{V_0}{\omega} . \end{aligned} \qquad (6)$$

W takim przypadku równania (5) przybierają postać:

$$x = A\left(\cos \phi \sin \omega t + \sin \phi \cos \omega t \right),$$

$$V = A\omega\left(\cos \phi \cos \omega t - \sin \phi \sin \omega t \right),$$

albo

$$\begin{aligned} x &= A \sin\left(\omega t + \phi \right), \\ V &= A \omega \cos\left(\omega t + \phi \right), \end{aligned} \qquad (7)$$

A - oznacza amplitudę ruchu, ϕ - fazę początkową.
Łatwo zauważyć, że przyspieszenie

$$a = \frac{dV}{dt} = -A\omega^2 \sin\left(\omega t + \phi \right) = -\omega^2 x \qquad (8)$$

proporcjonalne do wychylenia - jest cechą charakterystyczną dla ruchu harmonicznego prostego. Punkt materialny, który doznaje takiego przyspieszenia jest oscylatorem harmonicznym prostym. Torem opisywanego ruchu jest odcinek prostoliniowy zawarty między amplitudami $-A$ i $+A$ a ruch jest okresowy o okresie

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (9)$$

Okres zależy od masy punktu (m) oraz od siły centralnej (scharakteryzowanej współczynnikiem k), nie zależy natomiast od wychylenia i fazy. Drgania posiadające taką własność są izochroniczne. Zatem oscylator harmoniczny prosty jest oscylatorem izochronicznym.

Z warunku (6) wynika zależność amplitudy i fazy początkowej od warunków początkowych. Po prostych przekształceniach w (6) otrzymujemy wzory:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega^2}}, \qquad (10)$$

oraz

$$tg\phi = \frac{\omega x_0}{V_0}.$$

Jeżeli drgania zachodzą tylko po wpływem siły proporcjonalnej do wychylenia od położenia równowagi, wówczas mamy do czynienia z drganiami własnymi lub swobodnymi. Praca jaką należy wykonać wychylając punkt od położenia równowagi na odległość x w polu sił centralnych (1) jest miarą energii potencjalnej oscylatora

$$E_p = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (11)$$

(siłę wzięto ze znakiem plus, ponieważ pracę wykonujemy przeciwko sile centralnej 1).

Potencjał oscylatora harmonicznego

$$V_n = \frac{E_p}{m} = \frac{1}{2}\frac{k}{m}x^2 = \frac{1}{2}\omega^2 x^2. \qquad (12)$$

Energia kinetyczna

$$E_k = \frac{mV^2}{2} = \frac{m}{2}A^2\omega^2\cos^2(\omega t + \phi),$$

lub

$$E_k = \frac{m}{2}\omega^2\left(A^2 - x^2\right). \qquad (13)$$

Z (11) i (13) łatwo zauważyć, że energia całkowita

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{2\pi A^2 m}{T^2} \qquad (14)$$

jest wielkością stała, gdzie m, A i ω są stałe dla danego oscylatora. Energię kinetyczną można wyrazić za pomocą pędu

$$p = m\,V,$$

wówczas

$$E_k = \frac{mV^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \ .$$

Wtedy energia całkowita

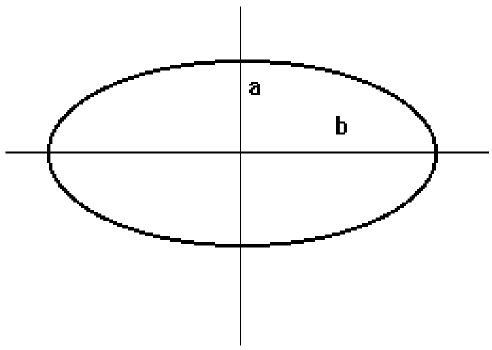
$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{p^2}{2m} \ . \qquad (15)$$

Stąd

$$\frac{x^2}{\frac{2E}{k}} + \frac{p^2}{2mE} = 1 \ . \qquad (16)$$

Jak wiadać równanie (16) jest równaniem elipsy. Pole powierzchni takiej elipsy w przestrzeni (konfiguracyjnej) położenia i pędu (x, p) obliczamy ze wzoru:

$$S = \pi a b \ , \qquad (17)$$



Rys 3.1

gdzie:

$$a = \sqrt{\frac{2E}{k}} \ ; \qquad b = \sqrt{2mE} \ . \qquad (18)$$

Po podstawieniu (18) do wzoru (17) otrzymujemy

$$S = 2\pi E\sqrt{\frac{m}{k}} = TE \ ,$$

gdzie: T - jest okresem drgań, lub uwzględniając (14) i odpowiednio przekształcając ostatni wzór dostajemy:

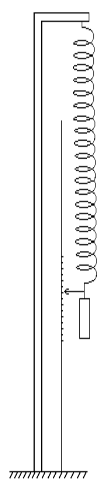
$$S = \frac{2\pi^2 A^2 m}{T} \ . \qquad (19)$$

W przypadku oscylatora kwantowego energia całkowita zmienia się w sposób nieciągły i pole elipsy może przyjmować ściśle określone wartości, prowadzi to w prosty sposób do kwantowania orbit w modelach atomu wodoru Bohra - Sommerfelda. Przykładem oscylatora harmonicznego,w pewnym przybliżeniu, może być sprężyna zawieszona jednym końcem, z drugiej strony obciążona obciążnikiem o masie m i wprawiona w ruch drgający. Drgania odbywają się wokół punktu równowagi, którego położenie uzależnione jest od wielkości siły ciężkości działającej na sprężynę i zaczepioną masę m. Drgania sprężyny odbywają się pod wpływem siły sprężystej -proporcjonalnej do wychylenia. Okres drgań jest wyrażony wzorem (9) , gdzie: m - jest masą obciążającą sprężynę, a k - wielkością charakterystyczną dla danej sprężyny. Wzór ten został wyprowadzony przy założeniu, że w drganiach uczestniczy jedynie masa m . W drganiach jednak bierze również udział masa sprężyny. Okres drgań z uwzględnieniem masy sprężyny m_s obliczymy ze wzoru

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{1}{3}m_s}{k}} . \qquad (20)$$

Opis przyrządu

Przyrząd, który służy do przeprowadzania pomiarów składa się ze statywu sztywno zespolonego ze stołem, sprężyny zawieszonej na statywie na tle skali milimetrowej oraz obciążników.



Rys. 2

Przebieg pomiarów

A. Badanie zależności F = f(x)

1. Przeprowadzamy pomiar wartości wychylenia od położenia równowagi dla 10-ciu różnych obciążeń sprężyny.
2. Sporządzamy wykres zależności F = f(x).
3. Obliczamy na podstawie wykresu współczynnik kierunkowy k.

B. Badanie izochronizmu drgań wahadła sprężynowego.

1. Wyznaczamy czas t n drgnień sprężyny.
2. Obliczamy okres ze wzoru T = t/n.
3. Porównujemy okres zmierzony z obliczonym ze wzoru (17).
4. Pomiary powtarzamy dla trzech różnych wychyleń początkowych.
5. Pomiary i obliczenia 1-4 powtarzamy dla różnych obciążeń sprężyny.

C. Obliczanie parametrów elipsy energetycznej.

1. Mierzymy okres jak w punkcie B dla 10 różnych amplitud przy ustalonej masie m.
2. Obliczamy energię całkowitą ze wzoru (14).
3. Pomiary powtarzamy dla pięciu różnych mas.
4. Badamy zależność energii potencjalnej od amplitudy $E_p = f_1(x)$, przy m = const.
5. Badamy zależność energii kinetycznej od amplitudy $E_k = f_2(x)$, przy m = const.
6. Sprawdzamy zasadę zachowania energii $E = E_k + E_p$ dla pięciu wychyleń, przy m = const.
7. Pomiary (pkt.4. 5.) i obliczenia (pkt.6.) powtarzamy dla tych samych mas, dla których wykonujemy pomiary w pkt. 3 .
8. Sporządzamy wykres elipsy energetycznej i obliczamy jej pole.
   a). Pomiary i obliczenia wykonujemy dla tych samych mas co w punkcie A.
   b). Obliczanie pola elipsy energetycznej wykonujemy na podstawie wzoru (19).

C`

1. Dla ustalonej amplitudy początkowej (A_0) wyznaczyć okres T dla 5-ciu różnych obciążeń.
2. Obliczyć S (19) dla każdego przypadku i sporządzić wykres $S = f(m)$.
3. Dla ustalonej masy wyznaczyć dla 5-ciu różnych amplitud początkowy okres T.
4. Obliczyć S ze wzoru (19) biorąc średnią amplitudę z każdego pomiaru.
5. Sporządzić wykres $S = f(A_{śr})$.

Każdemu etapowi pomiarów towarzyszy rachunek błędów, dyskusja wyników i wnioski.