

ĆWICZENIE 1.

WYZNACZANIE GĘSTOŚCI CIAŁ

Wprowadzenie

Miarą gęstości ρ jednorodnego ciała o masie m i objętości V jest :

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (1)$$

W przypadku ciał niejednorodnych gęstość możemy wyrazić związkiem

$$\rho = \frac{dm}{dV}, \quad (2)$$

gdzie: dm jest masą elementarnej objętości dV .

Ze zmianą temperatury zmienia się objętość. Dla ciał stałych i cieczy przy niewielkiej jej zmianie objętość

$$V = V_0(1 + \alpha\Delta T), \quad (3)$$

gdzie: α - jest współczynnikiem rozszerzalności objętościowej,

V_0 - objętością w jakiejś temperaturze początkowej T_0 (w skali Kelvina),

ΔT - przyrostem temperatury.

Z (1) i (3) możemy napisać

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \alpha\Delta T}; \text{ gdzie } \rho_0 = \frac{m}{V_0}. \quad (4)$$

Dla gazów doskonałych

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}, \quad (5)$$

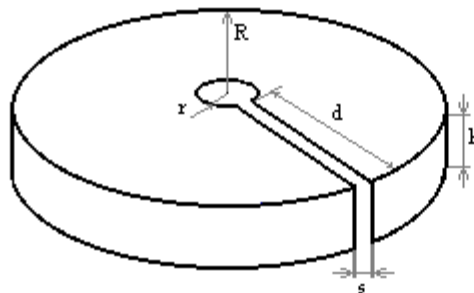
gdzie: μ - masa cząsteczkowa,

p - ciśnienie gazu,

R - stała gazowa,

T - temperatura bezwzględna.

A. Pomiar gęstości bryły sztywnej



Rys. 1.1.

Do pomiarów bierzemy bryłę w kształcie walca o promieniu zewnętrznym R i wysokości h z wyciętym otworem w kształcie walca o promieniu r oraz szczeliną o szerokości s i długości d . Bryła ma kształty dobrze określone geometrycznie. Objętość jej możemy wyznaczyć licząc objętość całego walca V_1 i odejmując objętość walca wewnętrznego V_2 oraz objętość szczeliny V_3 . Zatem

$$V = V_1 - V_2 - V_3. \quad (6)$$

gdzie $V_1 = \pi R^2 h,$ (7)

$$V_2 = \pi r^2 h, \quad (8)$$

oraz $V_3 = dsh$ (9)

W ostatnim przypadku zdajemy sobie sprawę, że objętość szczeliny (9) przybliżyliśmy objętością prostopadłościanu. Podstawą prostopadłościanu są powierzchnie zakrzywione.

Przy bardzo dokładnym pomiarze fakt ten należałoby uwzględnić odpowiednio modyfikując wzór (9)

Wyrażenie (6) w postaci jawnej przybierze postać:

$$V = h \{ \pi (R^2 - r^2) - sd \}. \quad (10)$$

Wzór, który wykorzystamy do pomiarów i obliczeń gęstości zapiszemy jako

$$\rho = \frac{m}{h \{ \pi (R^2 - r^2) - sd \}}. \quad (11)$$

Przebieg pomiarów.

Przed przystąpieniem do pomiarów sporządzamy szkic mierzonego przedmiotu i oznaczamy na nim wielkości (patrz rysunek 1.1.), które będą mierzone, a następnie przygotowujemy tabelę, w której zapisywać będziemy wyniki. W tabelce winny się znaleźć wszystkie wielkości mierzone oraz obliczane. Oznaczenia wielkości mierzonych w tabelce i na szkicu winny być takie same.

Lp.	m	m_s	R	R_s	r	r_s	s	s_s	d	d_s	h	h_s	ρ	ρ_s	$\bar{\rho}_s$
	kg	kg	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	kg/m^3		
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
1.															
2.															
3.															

1. Wyznaczamy masę bryłki przy pomocy wagi laboratoryjnej lub analitycznej zgodnie z zasadami ważenia. Pomiar odczytujemy trzykrotnie sprawdzając za każdym razem zero wagi.

2. Wyznaczamy trzykrotnie średnicę walca zewnętrzną i wewnętrzną przy pomocy suwmiarki. Średnicę walca wewnętrznego możemy wyznaczyć posługując się szczelinomierzem (odczyt podobny jak w przypadku śruby mikrometrycznej).
3. Długość i szerokość szczeliny wyznaczamy przy pomocy suwmiarki dokonując pomiaru w różnych miejscach.
4. Wysokość walca mierzymy śrubą mikrometryczną w różnych punktach.

Uwaga! Przed przeprowadzeniem pomiarów za pomocą suwmiarki i śruby mikrometrycznej należy sprawdzić „zero” tych przyrządów lub wartość początkową w przypadku szczelinomierza.

5. Obliczamy wartości średnie jako średnią arytmetyczną

$$a_{sr} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}.$$

Pozwala to nam zniwelować częściowo błędy pomiarowe wynikające z odstępstw kształtów rzeczywistych od kształtów geometrycznych bryłki pod warunkiem, że pomiar danej wielkości wykonywać będziemy w różnych miejscach bryły.

6. Obliczamy wartości gęstości materiału bryły dla każdego pomiaru ze wzoru (11).
7. Obliczamy średnią gęstość ρ_{sr} jak w punkcie (5).
8. Obliczamy średnią gęstość ρ_{sr} ze wzoru (11) posługując się uśrednionymi wartościami wielkości bezpośrednio mierzonych.
9. Porównujemy wyniki z punktu 7 i 8.
10. Przeprowadzamy rachunek błędów. Ponieważ wzór (11) nie jest logarytmowalny, korzystamy z metody różniczki zupełnej. Potraktujemy zatem gęstość ρ jako funkcję sześciu zmiennych

$$\rho = \rho(m, h, R, r, s, d)$$

wielkości zmieniających się w przedziale wyznaczonym przez dokładność przyrządów pomiarowych oraz dokładność wykonania bryły o określonych kształtach geometrycznych. Interesujący nas związek otrzymamy w postaci

$$\Delta\rho = \left| \frac{\partial\rho}{\partial m} \right| \Delta m + \left| \frac{\partial\rho}{\partial h} \right| \Delta h + \left| \frac{\partial\rho}{\partial R} \right| \Delta R + \left| \frac{\partial\rho}{\partial r} \right| \Delta r + \left| \frac{\partial\rho}{\partial s} \right| \Delta s + \left| \frac{\partial\rho}{\partial d} \right| \Delta d. \quad (12)$$

Jest to wzór na maksymalną wartość błędu pomiaru wielkości mierzonej.

$\Delta m, \Delta h, \Delta R, \Delta r, \Delta s, \Delta d$ szacujemy jako maksymalne błędy wynikające z użycia przyrządów pomiarowych (np. $\Delta m = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg} = 20 \text{ mg}$ co wiąże się z czułością wagi, $\Delta h = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0,001 \text{ mm}$ - z dokładnością odczytu skali śruby mikrometrycznej itp.). Przy większej liczbie pomiarów błędy wielkości mierzonych możemy obliczyć wykorzystując metodę statystyczną. Wzór (12) ma charakter ogólny, aby wykorzystać go w obliczeniach należy obliczyć pochodne cząstkowe funkcji ρ ze wzoru (11.) np.

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{2\pi m r}{h\{\pi[R^2 - r^2] - sd\}^2},$$

$$\left| \frac{\partial \rho}{\partial r} \right| = \left| \frac{2\pi m r}{h\{\pi[R^2 - r^2] - sd\}^2} \right|.$$

W podobny sposób obliczamy pozostałe pochodne cząstkowe. Aby otrzymać wzór pozwalający na obliczenie błędu maksymalnego należy otrzymane wzory na bezwzględne wartości (dodatnie) pochodnych cząstkowych podstawić do wzoru (12). Wynik, dla którego oszacowano błąd pomiarowy winien mieć postać

$$\rho = \bar{\rho} \pm \Delta\rho,$$

gdzie : $\bar{\rho}$ - jest wartością obliczoną ze wzoru (11).

11. Przeprowadzamy dyskusję wyników i wyciągamy wnioski. Próbujemy ocenić i oszacować wszelkie możliwe przyczyny błędów, które wymknęły się z pod kontroli rachunkowej (pkt.10) np. pominięcie zakrzywienia powierzchni zamykających szczelinę traktowaną jako prostopadłościan o ścianach płaskich, zaokrąglenie krawędzi bryły itp. Wyniki należy porównać z tablicowymi i na tej podstawie określić np. rodzaj materiału z jakiego zbudowana jest bryła itp.

B. Pomiar gęstości względnej ciał stałych przy wykorzystaniu prawa Archimedesesa.

Metoda pomiaru

Największym problemem przy pomiarze gęstości ciał stałych szczególnie nieforemnych jest pomiar ich objętości. W tym ćwiczeniu objętość wyznaczamy w oparciu o prawo Archimedesesa.

Ważymy ciało w powietrzu i wyznaczamy jego ciężar

$$P = mg, \quad (13)$$

(m - masa, g - przyspieszenie ziemskie).

Następnie ważymy zanurzając je w wodzie destylowanej o znanej gęstości ρ_w w danej temperaturze (z tablic). Ciężar w wodzie

$$P' = P - V\rho_w g, \quad (14)$$

stąd wyznaczamy objętość

$$V = \frac{P - P'}{g\rho_w}. \quad (15)$$

Zatem gęstość badanego ciała

$$\rho = \frac{m}{P - P'} g\rho_w, \quad (16)$$

lub
$$\rho = \frac{P}{P - P'} \rho_w.$$

Gęstość względem wody

$$\rho_{wz} = \frac{\rho}{\rho_w} = \frac{P}{P - P'}. \quad (17)$$

Jeżeli badane ciało pływa w wodzie (jego gęstość jest mniejsza od gęstości wody), to aby wyznaczyć jego objętość V_c z prawa Archimedesesa, doczepiamy do niego takie ciało, że po połączeniu oba ciała zanurzą się całkowicie w wodzie. Ważymy zatem w powietrzu ciało badane (P_c) oraz w wodzie: ciało doczepione (P') i ciało badane z doczepionym (P'').

Ciężar obu zanurzonych w wodzie ciał

$$P'' = P' + P_c \quad (18)$$

gdzie: P'_c - ciężar samego ciała badanego w wodzie.

Zatem

$$P'_c = P'' - P_c. \quad (19)$$

Ale z prawa Archimedesesa wynika, że

$$P'_c = P_c - V_c \rho_w g, \quad (20)$$

gdzie: P_c - jest ciężarem badanego ciała w powietrzu,
 V_c - jego objętością.

Więc po uwzględnieniu (19.)

$$V_c = \frac{P_c + P'_c - P''}{\rho_w g}. \quad (21)$$

Gęstość badanego ciała obliczamy ze wzoru

$$\rho_c = \frac{P_c}{P_c + P'_c - P''} \rho_w, \quad (22)$$

a gęstość względem wody z zależności

$$\rho_{wz} = \frac{\rho_c}{\rho_w} = \frac{P_c}{P_c + P'_c - P''}. \quad (23)$$

Wykorzystując prawo Archimedesesa możemy również wyznaczyć gęstość nieznaną cieczy. Używamy wtedy ciała stałego o znanej objętości (znajdzonej z 15.). Zanurzamy do naczynia zawierającego ciecz o nieznaną gęstości i ważymy.

$$P''' = P - V \rho_b g, \quad (24)$$

gdzie ρ_b - jest gęstością cieczy badanej.

Stąd

$$\rho_b = \frac{P - P'''}{Vg}. \quad (25)$$

Uwzględniając objętość ciała daną wzorem (15.) otrzymujemy

$$\rho_b = \frac{P - P'''}{P - P'} \rho_w, \quad (26)$$

lub gęstość względną

$$\frac{\rho_b}{\rho_w} = \frac{P - P'''}{P - P'}. \quad (27)$$

We wszystkich pomiarach zaniedbywaliśmy wpływ siły wyporu powietrza oraz temperatury na wyniki. Wpływ ten należałoby przedyskutować.

Przebieg pomiarów.

1. Wyznaczamy gęstość trzech ciał, których gęstość jest większa od wody. Wykorzystujemy wzory (16) i (17).
2. Pomiary przeprowadzamy dla tych samych ciał 3-krotnie.
3. Wyznaczamy gęstość ciała lżejszego od wody. Wykorzystujemy wzory (22) i (23). Jako ciało dodatkowe wykorzystujemy jedno z ciał, którego gęstość wyznaczyliśmy w pkt. 1 i 2. Pomiary powtarzamy trzykrotnie.
4. Wyznaczamy gęstość cieczy. Wykorzystujemy wzory (26) i (27). Ciałem zanurzonym w cieczy jest jedno z ciał, którego gęstość wyznaczono w punkcie 1 i 2.
5. Pomiary powtarzamy trzykrotnie.
6. Obliczamy błąd maksymalny metodą różniczki zupełnej.

$$\left. \begin{aligned} \Delta\rho &= \left| \frac{\partial\rho}{\partial P} \right| \Delta P + \left| \frac{\partial\rho}{\partial P'} \right| \Delta P'; \\ \Delta\rho_{wz} &= \left| \frac{\partial\rho_w}{\partial P} \right| \Delta P + \left| \frac{\partial\rho_w}{\partial P'} \right| \Delta P'; \\ \Delta\rho_c &= \left| \frac{\partial\rho_c}{\partial P_c} \right| \Delta P_c + \left| \frac{\partial\rho_c}{\partial P'} \right| \Delta P' + \left| \frac{\partial\rho_c}{\partial P''} \right| \Delta P''; \\ \Delta\rho_{cwz} &= \left| \frac{\partial\rho_{cw}}{\partial P_c} \right| \Delta P_c + \left| \frac{\partial\rho_{cw}}{\partial P'} \right| \Delta P' + \left| \frac{\partial\rho_{cw}}{\partial P''} \right| \Delta P''; \\ \Delta\rho_b &= \left| \frac{\partial\rho_b}{\partial P} \right| \Delta P + \left| \frac{\partial\rho_b}{\partial P'} \right| \Delta P' + \left| \frac{\partial\rho_b}{\partial P'''} \right| \Delta P'''; \\ \Delta\rho_{bw} &= \left| \frac{\partial\rho_{bw}}{\partial P} \right| \Delta P + \left| \frac{\partial\rho_{bw}}{\partial P'} \right| \Delta P' + \left| \frac{\partial\rho_{bw}}{\partial P'''} \right| \Delta P'''. \end{aligned} \right\} (28.)$$

Błędy pojedynczych pomiarów szacujemy na podstawie czułości wagi.

Wielkości pobrane z tablic traktujemy jako pozbawione błędów.

7. Przeprowadzamy dyskusję wyników.

C. Pomiar gęstości przy pomocy piknometru

Pomiar gęstości przy pomocy piknometru sprowadza się do pomiaru masy przy pomocy wagi, co można wykonać z bardzo dużą dokładnością.

Piknometr jest to naczynie szklane zamknięte szlifowanym korkiem z termometrem. W bocznej ścianie naczynia znajduje się rurka włoskowata, przez którą może wypływać nadmiar cieczy.

Gęstość wyznaczamy ze wzoru (1). Objętość badanej cieczy czy ciała stałego może być wyznaczona przy pomocy ważenia.

Pomiar gęstości cieczy i ciał stałych

Napełniamy piknometr wodą destylowaną o gęstości ρ_w (wziętej z tablic) i wyznaczamy masę wody m_w zawartej w piknometrze ze wzoru:

$$m_w = m_1 - m_p = V\rho_w, \quad (29)$$

gdzie: m_w - masa wody,

m_1 - masa piknometru napełnionego wodą,

m_p - masa piknometru pustego,

V - objętość wody zawartej w piknometrze.

Ze wzoru (29.) obliczamy objętość

$$V = \frac{m_1 - m_p}{\rho_w}. \quad (30)$$

Napełniając piknometr badaną cieczą mierzymy jego masę m_2 , a masę badanej cieczy obliczamy ze wzoru

$$m_c = m_2 - m_p. \quad (31)$$

Poszukiwaną gęstość cieczy znajdujemy ze wzorów (1), (30) i (31) w postaci

$$\rho_c = \frac{m_2 - m_p}{m_1 - m_p} \rho_w. \quad (32)$$

Uwzględniając siły wyporu działające na piknometr i odważniki wzór (32), co łatwo pokazać, przekształca się we wzór

$$\rho_c = \frac{m_2 - m_p}{m_1 - m_p} (\rho_w - \rho_p) + \rho_p, \quad (33)$$

gdzie: ρ_p - jest gęstością powietrza.

Przy mniej dokładnych pomiarach poprawki na siłę wyporu zaniedbujemy.

Przy pomocy piknometru możemy również wyznaczyć gęstość ciał stałych w postaci rozdrobnionej cięższych od wody nierozpuszczających się w wodzie.

Wyznaczamy masę m_3 piknometru napełnionego wodą i danym ciałem stałym, przy czym

$$m_3 = m_p + m'_w + m'_c, \quad (34)$$

gdzie: m'_w -masa wody w piknometrze po wypełnieniu go np. śrutem o masie m'_c . Objętość badanego ciała V_c jest równa objętości wody wypchniętej przez to ciało (z prawa Archimedesesa).

Masa wypchniętej wody

$$m''_w = m_1 + m'_c - m_3, \quad (35)$$

gdzie: m_1 - masa piknometru wypełnionego wodą.

Zatem

$$V'_c = \frac{m_1 + m'_c - m_3}{\rho_w}, \quad (36)$$

a gęstość badanego ciała

$$\rho'_c = \frac{m'_c}{m_1 + m'_c - m_3} \rho_w. \quad (37)$$

Uwzględniając poprawki na siłę wyporu powietrza wzór (37) da się zapisać w postaci

$$\rho'_c = \frac{m'_c}{m_1 + m'_c - m_3} (\rho_w - \rho_p) + \rho_p. \quad (38)$$

Przebieg pomiarów

1. Czyścimy piknometr denaturatem oraz osuszamy suszarką.
2. Ważymy pusty piknometr.
3. Ważymy piknometr napełniony wodą destylowaną.
4. Po osuszeniu napełniamy piknometr cieczą i wyznaczamy masę.
5. Pomiary 2, 3, 4 powtarzamy 3-krotnie.
6. Obliczamy gęstość cieczy korzystając ze wzorów (32) lub (33).
7. Czyścimy piknometr jak w punkcie 1.
8. Ważymy badane ciało stałe.
9. Ważymy piknometr napełniony wodą destylowaną.
10. Ważymy piknometr napełniony wodą i ciałem stałym.
11. Powtarzamy pomiary 8, 9 i 10 3-krotnie.
12. Obliczamy gęstość ciała stałego korzystając ze wzoru (37) lub (38).
13. Przeprowadzamy rachunek błędów jak w pkt. 7 części B
14. Wyciągamy wnioski.