

ĆWICZENIE 62

WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA TEMPERATUROWEGO OPORU. METODA MOSTKOWA.

Wprowadzenie

Uporządkowany ruch ładunków nazywamy prądem elektrycznym. Warunkiem koniecznym przepływu prądu jest obecność nośników (ładunków elektrycznych) w środowisku, oraz istnienie różnicy potencjałów. Natężenie pola elektrycznego wewnątrz przewodnika $E \neq 0$, innymi słowy wewnątrz przewodnika nie stanowi obszaru ekwipotencjalnego. Przyjmuje się, że prąd płynie od punktu o potencjale wyższym do punktu o potencjale niższym. Odpowiada to ruchowi nośników dodatnich. Tak określony kierunek nazywamy umownym. W przewodnikach metalicznych, często w próżni, nośnikami są elektrony (jak wiemy obdarzone ładunkiem ujemnym). Ruch jest możliwy od potencjału niższego (np. ujemnego), do wyższego, jest to kierunek rzeczywisty. Kierunek przepływu nośników i rzeczywisty kierunek prądu pokrywają się jedynie w przypadku nośników dodatnich. Wielkością charakteryzującą prąd elektryczny jest natężenie I . Mierzymy je szybkością przepływu ładunku Q przez określony przekrój przewodnika.

W przypadku prądu stałego.

$$I = \frac{Q}{t}, \quad (1)$$

gdzie: t jest czasem przepływu ładunku Q przez przekrój przewodnika S .

Jeżeli ładunek jest funkcją czasu, wówczas miarą natężenia jest pochodna ładunku względem czasu

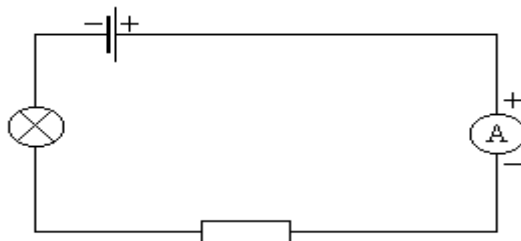
$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (2)$$

Jednostką natężenia jest amper, przy czym

$$[IA] = \frac{[IC]}{[Is]}$$

(C - kulomb, s - sekunda).

Natężenie mierzymy amperomierzem włączonym do obwodu szeregowo (patrz rys. 1).



Rys. 1

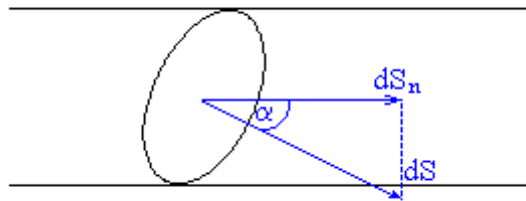
Duże znaczenie teoretyczne przy badaniu prądu elektrycznego ma wektorowa wielkość fizyczna zwana gęstością prądu.

$$\text{Miarą gęstości jest } \vec{j} = \frac{d\vec{I}}{dS_n} \quad (3)$$

lub

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS_n} \vec{v}_o \quad (4)$$

gdzie: S_n jest przekrojem normalnym, a \vec{v}_o wektorem jednostkowym skierowanym zgodnie z kierunkiem płynącego prądu.



Rys. 2

Zakładając, że gęstość nośników dodatnich i ujemnych wynosi n ich prędkość jest jednakowa i równa v a bezwzględna wartość ładunku elementarnego e , wówczas natężenie obliczymy ze wzoru

$$I = e \cdot n \cdot v \cdot S \cos \alpha. \quad (5)$$

Jeżeli nośniki poruszają się równoległe do ścian przewodnika, to

$$\vec{S} \circ \vec{v} = S \cdot v \cos \alpha$$

i

$$I = e \cdot n \cdot \vec{S} \circ \vec{v}. \quad (5')$$

Różniczkując wyrażenie względem przekroju S dostajemy

$$j = e \cdot n \cdot v \cos \alpha,$$

lub uwzględniając

$$\begin{aligned} v \cdot \cos \alpha &= v_n, \\ j &= e \cdot n \cdot v_n. \end{aligned}$$

Ostatni związek można zapisać wektorowo

$$\vec{j} = e \cdot n \cdot \vec{v}_n . \quad (6)$$

Zależności (5') i (6) opisują natężenie prądu oraz jego gęstość przy pomocy wielkości mikroskopowych.

Łatwo zauważyć, że natężenie prądu.

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_S e \cdot n \cdot \vec{v}_n d\vec{S} . \quad (7)$$

Jeżeli założymy, że ładunek jest funkcją wielu zmiennych i wypływa z pewnej objętości przewodnika, to (korzystając z (7))

$$-\frac{\partial Q}{\partial t} = \int_S \vec{j} d\vec{S} . \quad (8)$$

Ale

$$Q = \int_V \rho dV , \quad (9)$$

(gdzie, ρ - gęstość ładunku, V objętość przewodnika, w której znajduje się ładunek Q) i na mocy twierdzenia Gaussa

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{j} dV , \quad (10)$$

(gdzie powierzchnia S zamyka objętość V), równanie (8) da się zapisać następująco:

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_V \text{div} \vec{j} dV .$$

Ponieważ objętości po obu stronach równania są identyczne, a całki są równe, to i funkcje podcałkowe są równe.

Zatem

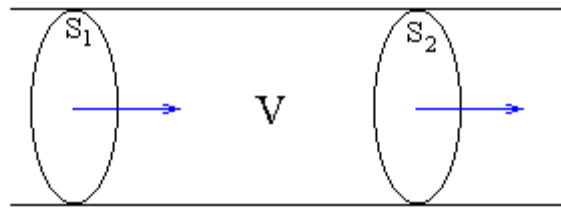
$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div} \vec{j} ,$$

lub

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 . \quad (11)$$

jest to tzw. równanie ciągłości.

Jeżeli ubytek ładunków z objętości V przewodnika przez powierzchnię S_2



Rys. 3.

jest skompensowany dopływem ładunków przez powierzchnię S_1 (rys. 3.), wówczas mamy stan stacjonarny. Gęstość ładunków w objętości V nie ulega zmianie

$$\rho = \text{const},$$

a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (12)$$

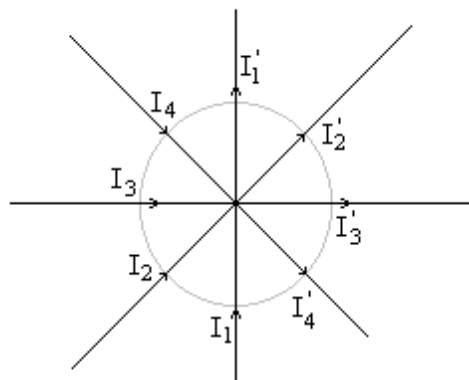
Stąd wynika, że równanie

$$\text{div} \vec{j} = 0, \quad (13)$$

Zatem w objętości V przewodnika nie ma źródeł prądu.

Zarówno wyrażenia (12) jak i (13) są równaniami ciągłości w stanach stacjonarnych.

Założmy, że do pewnego punktu obwodu wpływa N_1 prądów i wypływa z niego N_2 prądów odpowiednio o natężeniach I_1, I_2, \dots, I_{N_1} oraz $I'_1, I'_2, \dots, I'_{N_2}$. Suma prądów wpływających i wypływających wynosi $N = N_1 + N_2$



Rys. 4.

Równanie ciągłości (13) z uwzględnieniem twierdzenia (10) zapisujemy w postaci

$$\int_S \vec{j} d\vec{S} = 0 . \quad (14)$$

W naszym przypadku na powierzchnię S składają się powierzchnie przekrojów N - przewodników, zatem wzór (14) możemy zastąpić sumą

$$\sum_{i=1}^N \vec{j}_i \vec{S}_i = 0 ,$$

ale

$$\vec{j}_i \cdot \vec{S}_i = I_i ,$$

więc

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0 . \quad (15)$$

Otrzymaliśmy prawo Kirchhoffa, które mówi, że suma natężeń prądów wpływających do węzła sieci elektrycznej jest równa sumie prądów wypływających. Co można zapisać bardziej przejrzysto

$$\sum_{i=1}^{N_1} I_i = \sum_{i=1}^{N_2} I_i' . \quad (16)$$

Patrząc na wzór 5' wydawać by się mogło, że natężenie prądu można byłoby zwiększać dowolnie zwiększając prędkość przepływu nośników v przez przyłożenie odpowiedniej różnicy potencjałów U . W rzeczywistości prędkość ta jest prędkością dryfu. Ruch nośników nie jest swobodny odbywa się w środowisku wypełnionym drgającymi atomami środowiska. Dochodzi do licznych zderzeń, nośniki przemieszczają się we wszystkich kierunkach, z tym że przemieszczanie w kierunku wyznaczonym przez różnicę potencjałów jest nieco większe. Prędkość v jest tą prędkością przemieszczania. Zatem nośniki doznają oporu ruchu. Natężenie prądu I jest funkcją przyłożonego napięcia

$$I=f(U).$$

W ustalonej temperaturze

$$\frac{U}{I} = const.$$

Stała ta zależna jest od środowiska, od cech geometrycznych przewodnika; nazywamy ją oporem elektrycznym

$$\frac{U}{I} = R \quad (17)$$

Opór elektryczny nie zależy ani od płynącego prądu (I) ani od przyłożonego napięcia (U).

Funkcja $I = f(U)$ znana jest jako prawo Ohma. W postaci jawnej dla prądu stałego możemy ją zapisać:

$$I \sim U, \quad (18)$$

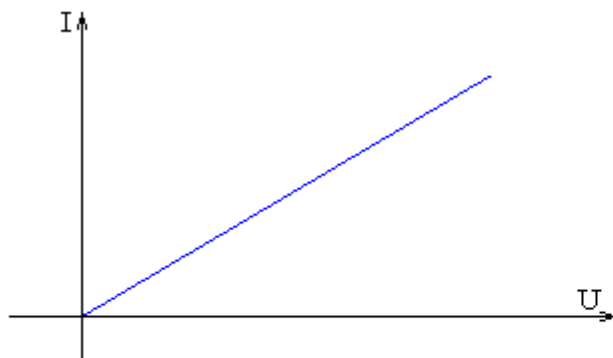
lub

$$I = k U,$$

gdzie $k = \frac{I}{U} = \text{const}$, (ze wzoru 17)

Zatem

$$I = \frac{U}{R}. \quad (19)$$



Rys. 5

Przewodniki, dla których spełniony jest warunek (18), nazywamy omowymi lub liniowymi (patrz wykres 5).

Prawo Ohma możemy sformułować inaczej wiążąc je ze środowiskiem, wówczas

$$R = \rho_w \frac{l}{S} ; \quad R = \rho_w \frac{dl}{dS}, \quad (20)$$

gdzie:

ρ_w – opór właściwy zależny od cech przewodnika, od jego struktury;

l - długość przewodnika, S - przekrój.

Zróżniczkujemy (19), wówczas

$$dI = \frac{1}{R} dU . \quad (21)$$

Z wyrażenia (3) wynika, że

$$dI = \vec{j} d\vec{S} .$$

Wiadomo, że $dU = \vec{E} \cdot d\vec{l}$ (l - długość przewodnika, E - natężenie pola elektrycznego wewnątrz przewodnika). W naszym przypadku

$$\vec{j} \uparrow \uparrow d\vec{l} .$$

Podstawiając otrzymane związki do wyrażenia (21) otrzymamy

$$\vec{j} d\vec{S} = \frac{I}{R} \vec{E} d\vec{l} .$$

Ponieważ $d\vec{l} \parallel d\vec{S}$, to

$$\vec{j} dS = \frac{I}{R} \vec{E} dl .$$

Uwzględniając (20) dostaniemy

$$\vec{j} dS = \frac{I}{\rho_w} \frac{dS}{dl} \vec{E} dl .$$

Ostatecznie

$$\vec{j} = \sigma_w \vec{E} \quad (22)$$

gdzie : $\sigma_w = \frac{I}{\rho_w}$ jest przewodnością właściwą. Jest to tzw. „różniczkowa” postać prawa Ohma.

Jednostką oporu elektrycznego w układzie SI jest om [1 Ω], jego wymiar określamy ze wzoru (17)

$$[1 \Omega] = \left[\frac{IV}{IA} \right] .$$

Opór elektryczny zależy od temperatury. Dla przewodników metalicznych można w przybliżeniu napisać wzór:

$$\rho_w = \rho_{wo} (1 + \alpha \Delta T) , \quad (23)$$

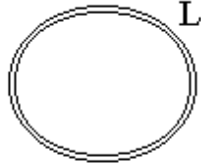
gdzie: ρ_{wo} - opór właściwy w temperaturze $T_o = 273^\circ\text{K}$, α - współczynnik temperaturowy oporu. Dla temperatur zbliżonych do temperatury pokojowej temperaturowy współczynnik oporu

$$\alpha = \frac{\rho_w - \rho_{wo}}{\Delta T \rho_{wo}} . \quad (24)$$

Weźmy pod uwagę (22), stąd

$$\vec{E} = \frac{I}{\sigma_w} \vec{j} .$$

Rozpatrzmy przewodnik zamknięty o długości L .



Obliczamy całkę po konturze L ,

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \frac{I}{\sigma_w} \oint_L \vec{j} d\vec{l} .$$

Niech

$$\vec{j} \parallel d\vec{l} , \text{ jeżeli } \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 ,$$

to

$$\frac{I}{\sigma_w} \oint_L j dl = 0 ,$$

ale

$$j = \frac{I}{S} ,$$

więc

$$I \oint_L \frac{dl}{\sigma_w S} = 0 .$$

Łatwo zauważyć, że

$$\oint_L \frac{dl}{\sigma_w S} = R . \quad (25)$$

Więc $U = I \cdot R = 0$, stąd $I = 0$, ponieważ $R \neq 0$.

W obwodzie nie płynie prąd ponieważ brak w nim siły elektromotorycznej.

Założyliśmy na początku, że

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 ,$$

co oznacza brak czynnika podtrzymującego ruch ładunków elektrycznych.

Jeżeli istnieje czynnik zewnętrzny podtrzymujący przepływ ładunków, wówczas

$$\vec{j} = \sigma_w (\vec{E} + \vec{E}_z) ,$$

gdzie \vec{E}_z - natężenie pola elektrycznego pochodzącego od zewnątrz.

Wtedy

$$\oint_L \vec{j} d\vec{l} \neq 0 .$$

Zatem

$$\frac{1}{\sigma_w} \oint_L \vec{j} d\vec{l} = \oint_L (\vec{E} + \vec{E}_z) d\vec{l} = IR .$$

Ponieważ

$$\oint_L \vec{j} d\vec{l} = 0 ,$$

to

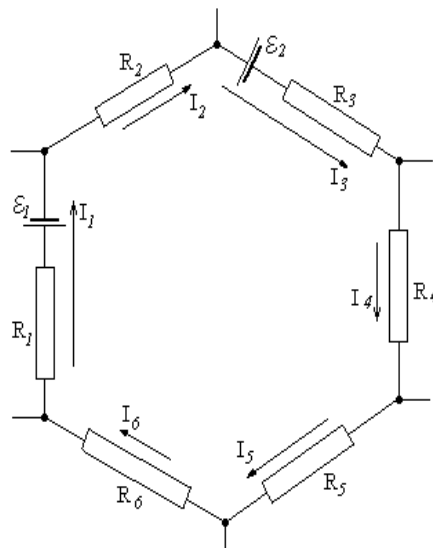
$$\oint_L \vec{E}_z d\vec{l} = IR \neq 0 .$$

Jest to siła elektromotoryczna, którą oznaczymy przez \mathcal{E}

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}_z d\vec{l} = IR$$

R - oznacza całkowity opór obwodu

Jeżeli obwód zawiera K sił elektromotorycznych i N oporów elektrycznych,



Rys. 6

wówczas

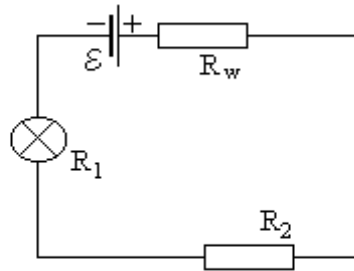
$$\sum_{i=1}^K \mathcal{E}_i = \sum_{i=1}^N I_i R_i , \quad (27)$$

jest równaniem zapisanym dla komórki elektrycznej przedstawionej na rys. 6, gdzie $K = 2$, a $N = 6$.

Wzór (27) jest matematyczną postacią drugiego prawa Kirchhoffa. Formułujemy je następująco:

W zamkniętym oczku sieci elektrycznej suma wszystkich sił elektromotorycznych tam występujących jest równa sumie spadków napięć na wszystkich oporach oczka.

Zapisując to prawo dla obwodu zamkniętego przedstawionego na schemacie 7 otrzymamy:



Rys. 7

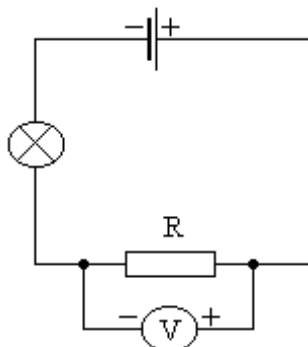
$$\mathcal{E} = IR_w + IR_1 + IR_2 = I(R_w + R_z) ,$$

gdzie $R_z = R_1 + R_2$,
stąd

$$I = \mathcal{E} / (R_z + R_w) \quad (28)$$

Ostatni wzór przedstawia prawo Ohma dla obwodu zamkniętego.

Zauważmy, że $IR_z = U$ jest spadkiem napięcia na oporze zewnętrznym. Napięcie mierzymy w woltach. Woltomierz włączamy równoległe do obwodu w punktach między którymi chcemy zmierzyć różnicę potencjałów (napięcie).



Rys. 8

Miarą pracy przy przesunięciu ładunku między punktami o różnicy potencjałów U , jest iloczyn

$$W = Q \cdot U , \quad (29')$$

lub

$$W = U \cdot I \cdot t = I^2 R \cdot t \quad (29)$$

Dla dowolnego przypadku nieskończenie mała praca

$$dW = U \cdot Idt = I^2 R dt \quad (30)$$

Zależności (29) i (30) przedstawiają prawo Joule'a. Opisuje ono skutki energetyczne przepływu prądu elektrycznego, (np. wydzielanie się ciepła na oporniku R w wyniku przepływu prądu o natężeniu I w czasie t).

Pracę mierzymy w dżulach.

Miarą mocy jest iloraz

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

Różniczkując wyrażenie (29') otrzymamy

$$\frac{dQ}{dt} \cdot U + Q \cdot \frac{dU}{dt} = \frac{dW}{dt} = P.$$

W stanie ustalonym $U = \text{const}$ i

$$P = \frac{dQ}{dt} \cdot U = I \cdot U, \quad (31)$$

lub

$$P = I^2 R. \quad (32)$$

W układzie SI jednostką mocy jest wat.

Uwzględniając (7) oraz (26), wzór (31) zapiszemy w postaci

$$P = \int jE \cdot l dS,$$

ponieważ $l \cdot dS = dV$ jest elementem objętościowym, to

$$P = \int jEdV,$$

ale z prawa Ohma $j = \sigma_w E$,

zatem

$$P = \sigma_w \int E^2 dV,$$

stąd

$$\frac{dP}{dV} = \sigma_w E^2. \quad (33)$$

$\frac{dP}{dV}$ - jest gęstością mocy. Łatwo zauważyć, że gęstość mocy silnie zależy od natężenia pola elektrycznego wewnątrz przewodnika.

Korzystając z prawa Ohma i praw Kirchhoffa otrzymamy zależności na łączenie oporów. W przypadku łączenia szeregowego n oporników

$$R_{zast.} = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i . \quad (34)$$

Jeżeli wszystkie opory są jednakowe, wówczas

$$R_{zast.} = nR .$$

Przy łączeniach równoległych opór całkowity jest mniejszy od najmniejszego oporu połączonego równolegle

$$\frac{1}{R_{zast.}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} . \quad (35)$$

Gdy

$$R_1 = R_2 = \dots = R_n = R , \text{ to}$$

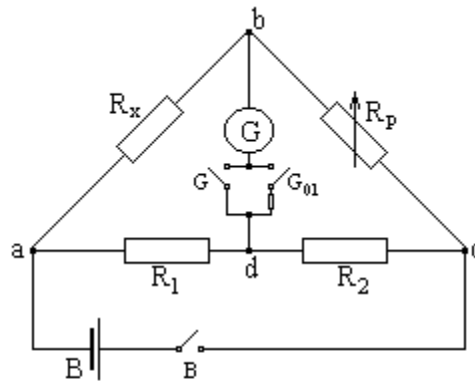
$$R_{zast.} = \frac{R}{n} .$$

Jeżeli łączymy k oporników szeregowo z tak utworzonych szeregów tworzymy n połączeń równoległych a wszystkie oporniki są jednakowe, to opór zastępczy układu obliczamy ze wzoru:

$$R_{zast.} = \frac{k}{n} R .$$

Wyznaczanie współczynnika temperaturowego oporu. Metoda mostkowa.

Do pomiaru oporu często wykorzystuje się mostek Wheatstone'a. Schemat mostka przedstawiono na rysunku poniżej.



Rys. 10

Przed przystąpieniem do odczytu wskazań przyrządów - mostek zrównoważymy tzn. przez galwanometr G nie może płynąć prąd elektryczny (po zamknięciu wyłączników B i G). W stanie równowagi potencjały punktu b i d są identyczne wtedy:

$$U_{ab} = U_{ad} , \tag{34}$$

i

$$U_{bc} = U_{cd} .$$

Rozpływ prądów następuje w punktach a i c

$$I_a = I_{ab} + I_{ad} ,$$

i

$$I_c = I_{bc} + I_{cd} ,$$

ale

$$I_{ab} = I_{bc} \text{ oraz } I_{ad} = I_{cd} ,$$

a

$$U_{ab} = I_{ab} R_x ; U_{ad} = I_{ad} R_1 \tag{35}$$

$$U_{bc} = I_{bc} R_p ; U_{cd} = I_{cd} R_2 .$$

Podstawiając (35) do (34) i wykonując proste działania otrzymujemy

$$\frac{R_x}{R_p} = \frac{R_1}{R_2} ,$$

a stąd

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_p . \quad (36)$$

Ostatni związek pozwala na obliczenie mierzonego oporu. Ponieważ oporniki R_1 , R_2 oraz R_p są wykonane z dużą dokładnością pomiar oporu przy pomocy mostka Wheatstone'a charakteryzuje się dużą precyzją.

Teoria

Zależność oporu elektrycznego od temperatury w przybliżeniu możemy obliczyć ze wzoru (23). Zastępując opór właściwy oporem możemy go zapisać następująco:

$$R_1 = R_o(1 + \alpha t_1) ,$$

gdzie: R_o - jest oporem mierzonym w temperaturze $T_o = 273^\circ \text{K}$, a R_1 - oporem zmierzonym w temperaturze t_1 .

Na ogół nie znamy R_o , a zmierzyć możemy R_1 i t_1 . Równanie zawiera dwie niewiadome (R_o i α). Aby rozwiązanie było jednoznaczne musimy posłużyć się jeszcze drugim równaniem.

$$R_2 = R_o(1 + \alpha t_2) .$$

w tym równaniu możemy zmierzyć R_2 i t_2 . Dzieląc je stronami otrzymamy:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2} ,$$

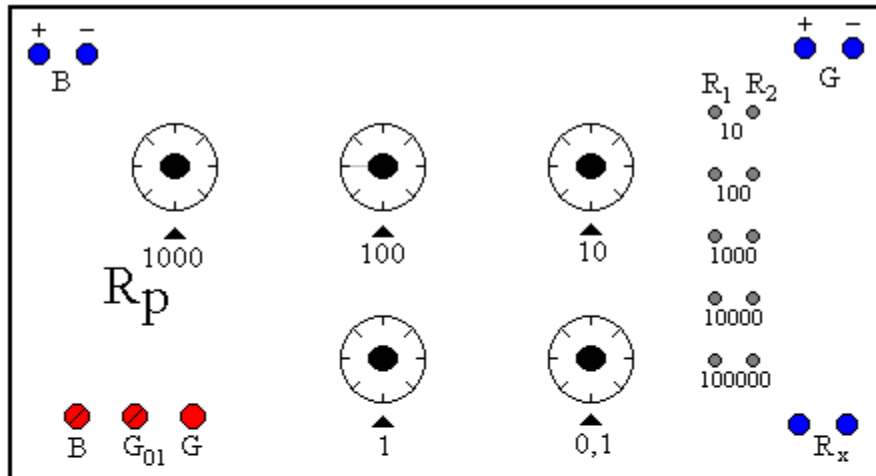
a stąd po prostych przekształceniach wyznaczamy współczynnik temperaturowy oporu

$$\alpha = \frac{R_2 - R_1}{R_1 t_2 - R_2 t_1} . \quad (37)$$

Przebieg pomiarów

1. Do mostka Wheatstone'a podłączamy zasilanie z prostownika do zacisków B.

Galwanometr włączamy do gniazda G oraz mierzony opór do zacisków R_x (patrz schemat rys. 11).



Rys. 11

- Zasilanie mostka włączamy przez wciśnięcie i przekręcenie wyłącznika B (w lewym dolnym rogu).
- Wciskając wyłącznik galwanometru G_{01} sprawdzamy zerowanie (istnieje możliwość zablokowania tego przycisku w taki sam sposób jak przycisku B). Jeżeli wskazówka galwanometru wyraźnie się przesuwa należy dużymi pokrętłami (R_p) doprowadzić ją do zera skali. Następnie naciskając wyłącznik G (dający największą czułość) przepuszczamy prąd przez galwanometr

i wyzerowujemy go przy pomocy pokręteł R_p .

- Po wyzerowaniu odczytujemy wartość R_p oraz temperaturę początkową opornika.

UWAGA! (Opornik zanurzamy w kąpielii olejowej, której temperaturę mierzymy termometrem, podgrzewamy kuchenką elektryczną zasilaną z autotransformatora).

- Zmieniamy ustawienia pokręteł (R_p) o wskazaną przez prowadzącego wartość oporu, podgrzewamy opornik i w momencie wyzerowania galwanometru odczytujemy temperaturę.
- Czynności z punktu 5 powtarzamy do momentu gdy temperatura (lub opór) osiągnie wartość wskazaną przez prowadzącego zajęcia.
- Czynności z punktów 2 - 6 powtarzamy dla przewodnika metalicznego.
- Czynności z punktów 2 - 6 powtarzamy dla termistora.

9. Czynności z punktów 2 - 6 powtarzamy dla roztworu.
10. Sporządzamy wykres zależności $R = f(t)$ dla każdego rodzaju opornika.
11. Dzielimy przedział temperatury na takie podprzedziały w których wykres $R = f(t)$ jest zbliżony do odcinka.
12. Obliczamy współczynnik temperaturowy oporu ze wzoru (37) biorąc z wykresu wartości oporów i brzegi przedziału temperatury.
13. Przeprowadzamy rachunek błędów i analizę wyników.
14. Wyciągamy wnioski.

Literatura:

1. Jay Orear - Fizyka t. 1
2. Jaworski, Dietław, Pinski - Kurs fizyki t. 2
3. Imre Tarian - Fizyka dla przyrodników (Biologia, Rolnictwo)
4. S. Przestalski - Fizyka z elementami biofizyki i agrofizyki
(Biologia, Rolnictwo)
5. T. Dryński - Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki
6. H. Szydłowski - Pracownia fizyczna
7. J. Kuczera - Laboratorium fizyki i biofizyki (Biologia,
Rolnictwo)
8. A. Murkowski - Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki i biofizyki
(Biologia, Rolnictwo)